

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO  
ĐẠI HỌC HUẾ  
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

# BÁO CÁO TỔNG KẾT ĐỀ TÀI KHOA HỌC VÀ CÔNG NGHỆ CẤP ĐẠI HỌC HUẾ

Tên đề tài:

PHÉP NHÚNG COMPACT VÀ CÁC TOÁN TỬ VI PHÂN  
BẤT BIẾN CỦA KHÔNG GIAN ĐỐI XỨNG NỬA ĐƠN

Mã số: DHH2017-03-99

Chủ nhiệm đề tài: PGS.TS. Trần Đạo Đông  
Đơn vị: trường Đại học Sư phạm, Đại học Huế

*Huế, 12-2018*

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO  
ĐẠI HỌC HUẾ  
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

# BÁO CÁO TỔNG KẾT ĐỀ TÀI KHOA HỌC VÀ CÔNG NGHỆ CẤP ĐẠI HỌC HUẾ

Tên đề tài:

PHÉP NHÚNG COMPACT VÀ CÁC TOÁN TỬ VI PHÂN  
BẤT BIẾN CỦA KHÔNG GIAN ĐỐI XỨNG NỬA ĐƠN

Mã số: DHH2017 03-99

Xác nhận của cơ quan chỉ trì đề tài

*(ký, họ và tên, đóng dấu)*

Chủ nhiệm đề tài

*(ký, họ tên)*

Trần Đạo Đông

*Huế, 12-2018*

## DANH SÁCH CÁC THÀNH VIÊN THAM GIA ĐỀ TÀI

1. TS. Trần Nguyễn Khánh Linh

*Trường Đại học Sư phạm, Đại học Huế*

2. Trần Công Nghĩa

*Học viên cao học trường DHSP, Đại học Huế*

**Demo Version - Select.Pdf SDK**  
3. Lê Nguyễn Khánh Trang

*Học viên cao học trường DHSP, Đại học Huế*

4. Trần Đức Hòa

*Học viên cao học trường DHSP, Đại học Huế*

# Mục lục

Trang phụ bìa	i
Danh sách các thành viên tham gia đề tài	iii
Mục lục	1
Thông tin kết quả nghiên cứu	3
Information on Research results	5
A. Tổng quan về vấn đề nghiên cứu	7
B. Các kết quả của đề tài	12
<b>Demo Version - Select.Pdf SDK</b>	
Chương 1 Phép nhúng compact và toán tử vi phân bất biến	13
1.1 Mở đầu	13
1.2 Một phép nhúng compact của không gian đối xứng Riemann	15
1.3 Các toán tử vi phân bất biến	23
1.4 Định lý lỗi Kostant	26
1.5 Các thể hiện của định lý lỗi Kostant	29
1.5.1 Định lý lỗi Kostant trên quỹ đạo liên hợp và đối liên hợp	29
1.5.2 Định lý lỗi Kostant trên quỹ đạo của không gian compact hóa	36
Chương 2 Đại số Kähler với lược đồ chiều không	42
2.1 Mở đầu	42
2.2 Môđun vi phân Kähler m-dạng $\Omega_{R_x/K}^m$	45

2.2.1	Định nghĩa và một số tính chất . . . . .	45
2.2.2	Một số tính chất tổng quát của $\Omega_{R_{\mathbb{X}}/K}^m$ . . . . .	48
2.3	Hàm Hilbert của $\Omega_{R_{\mathbb{W}}/K}^m$ đối với tập các điểm béo $\mathbb{W}$ . . . . .	54
2.4	Đa thức Hilbert của $\Omega_{R_{\mathbb{W}}/K}^{n+1}$ đối với lược đồ các điểm béo $\mathbb{W}$ . .	60
2.5	Lược đồ các điểm béo có giá nằm trên đường cong bậc hai tron	66
2.6	Đại số vi phân Kähler của $R_{\mathbb{X}}/K[x_0]$ . . . . .	75
	<b>Kết luận</b>	<b>78</b>
	<b>Tài liệu tham khảo</b>	<b>79</b>
	<b>Phụ lục</b>	<b>83</b>

**Demo Version - Select.Pdf SDK**

# THÔNG TIN KẾT QUẢ NGHIÊN CỨU ĐỀ TÀI KHOA HỌC VÀ CÔNG NGHỆ CẤP ĐẠI HỌC HUẾ

## 1. Thông tin chung:

**1.1. Tên đề tài:** Phép nhúng compact và các toán tử vi phân bất biến của không gian đối xứng nửa đơn.

**1.2. Mã số:** DHH2017 03-99

**1.3. Chủ nhiệm đề tài:** PGS.TS. Trần Đạo Đông.

**1.4. Cơ quan chủ trì:** Trường Đại học Sư phạm, Đại học Huế.

**1.5. Thời gian thực hiện:** 01/2017 đến 12/2018.

## 2. Mục tiêu:

Mục tiêu của đề tài là xây dựng một phép nhúng compact cho các không gian đối xứng nửa đơn thuộc loại Riemann và xác định đại số các toán tử vi phân bất biến trên không gian compact vừa xây dựng; khảo sát các mở rộng của định lý lỗi Kostant cho nhóm Lie nửa đơn liên thông và khảo sát đại số vi phân Kähler cho các lược đồ chiều không trong không gian xạ ảnh  $n$ -chiều.

## 3. Tính mới và tính sáng tạo:

Các nội dung nghiên cứu của đề tài góp phần phát triển các kết quả đã đạt được về sự thể hiện của các không gian đối xứng trong không gian compact, phép dựng các toán tử vi phân bất biến trên không gian compact hóa tương ứng, mối liên hệ giữa định lý lỗi Kostant với hình học symplectic và các quỹ đạo đối liên hợp, cấu trúc của đại số các dạng vi phân Kähler đối với các lược đồ chiều không trong không gian xạ ảnh  $n$ -chiều.

## 4. Các kết quả nghiên cứu thu được:

- Xây dựng một phép nhúng compact cho các không gian đối xứng nửa đơn thuộc loại Riemann và xác định đại số các toán tử vi phân bất biến trên không gian compact vừa xây dựng.

- Khảo sát mở rộng của định lý lỗi Kostant cho nhóm Lie compact liên

thông theo quan điểm của hình học symplectic và các quỹ đạo đối liên hợp.

- Khảo sát các tính chất của đại số các dạng vi phân Kähler đối với các lược đồ chiều không trong không gian xạ ảnh  $n$ -chiều.

## 5. Các sản phẩm của đề tài:

### 5.1. Sản phẩm nghiên cứu:

- 01 bài báo trong nước: HU J. of Natural Science, 2018, Vol 127, No 1A, 55-65.

Tên bài báo: A compact imbedding of Riemannian symmetric spaces.

Tác giả: Tran Dao Dong.

- 01 bài báo quốc tế: Journal Algebra, 2018, Vol 501, 255-284.

Tên bài báo: Kahler differential algebras for 0-dimensional schemes.

Tác giả: Martin Kreuzer, Tran Nguyen Khanh Linh, Le Ngoc Long.

### 5.2. Sản phẩm đào tạo:

Đề tài được phát triển trong 02 luận văn Thạc sĩ đã bảo vệ thành công.

- Học viên: Trần Công Nghĩa

Tên đề tài: Quỹ đạo đối liên hợp của nhóm  $T^n$  và cấu trúc symplectic.

- Học viên: Lê Nguyễn Khánh Trang

Tên đề tài: Về định lý lỗi Kostant và thể hiện trên quỹ đạo đối liên hợp.

## 6. Các đóng góp, khả năng ứng dụng và phương thức chuyển giao kết quả nghiên cứu:

Kết quả nghiên cứu của đề tài có thể phát triển thành bài giảng chuyên đề cao học và tài liệu tham khảo cho các chuyên ngành Đại số-Lý thuyết số và Hình học-Tôpô.

Cơ quan chủ trì đề tài

(ký, họ và tên, đóng dấu)

Ngày tháng năm

Chủ nhiệm đề tài

(ký, họ và tên)

**Trần Đạo Đông**

**INFORMATION ON STUDY RESULTS**  
**RESEARCH PROJECT ASSIGNED BY HUE UNIVERSITY**

**1. General information of project:**

*1.1. Project title:* A compact imbedding and invariant differential operators of semi simple symmetric spaces.

*1.2. Project code:* DHH2017 03-99

*1.3. Coordinator:* Prof. Dr. Tran Dao Dong.

*1.4. Implementing institution:* HU-University of Education.

*1.5. Implementing duration:* January 01, 2017 to December 31, 2018.

**2. Study objective(s):**

The aim of the project is to construct a compact imbedding of Riemannian symmetric spaces and consider the system of invariant differential operators on the corresponding compactification; study some generalization of the Kostant's nonlinear convexity theorem for connected semi simple Lie groups and the Kähler differential algebras for 0-dimensional schemes in a projective  $n$ -space.

**3. Novelty and creativeness of the study:**

The results of the project on constructing a compact imbedding of Riemannian symmetric spaces and the system of invariant differential operators on the corresponding compactification and studying the Kähler differential algebras for 0-dimensional schemes in a projective  $n$ -space are creative and scientific.

**4. Main study results:**

- Constructed a compact imbedding of Riemannian symmetric spaces and showed that the system of invariant differential operators on them can extend analytically on the corresponding compactification;

- Studied some generalization of the Kostant's nonlinear convexity theorem for connected semi simple Lie groups;

- Studied the Kähler differential algebras for 0-dimensional schemes in a projective  $n$ -space.

## 5. Project outputs:

**5.1. Publications:** Study results of the Project have published in two following papers.

- HU J. of Natural Science, 2018, Vol 127, No 1A, 55-65.

Name of paper: A compact imbedding of Riemannian symmetric spaces.

Author: Tran Dao Dong.

- Journal Algebra, 2018, Vol 501, 255-284.

Name of paper: Kahler differential algebras for 0-dimensional schemes.

Authors: Martin Kreuzer, Tran Nguyen Khanh Linh, Le Ngoc Long.

**5.2. Training and education:** There were two Master Thesis carried out following this study approach and both of them were successfully defended.

- Master student: Tran Cong Nghia.

Thesis title: Coadjoint orbits of Lie groups and their symplectic structure.

**Demo Version - Select.Pdf SDK**

- Master student: Le Nguyen Khanh Trang.

Thesis title: On Kostant's theorem and their realization on coadjoint orbits.

## 6. Contributions, application possibility and ways of transfer of study results:

Study results of the Project can be transferred for the post-graduate studies, especially for the training of the Algebra-Number Theory subject and the Geomery-Topology subject.

*Date:*

**Implementation institution**

*(sign and seal)*

**Project coordinator**

*(sign and full name)*

**Tran Dao Dong**

## A. TỔNG QUAN VỀ VẤN ĐỀ NGHIÊN CỨU

Nghiên cứu cấu trúc và sự thể hiện của các không gian đối xứng nửa đơn trong không gian compact là một trong các bài toán cơ bản của Lý thuyết Lie. Nhiều kết quả tiêu biểu trong lĩnh vực này được trình bày trong các công trình của A. Borel, J. Sekiguchi, T. Oshima, N. Shimeno, Lizhen Ji,... đã góp phần làm sáng tỏ cấu trúc của các lớp không gian đối xứng cụ thể và sự thể hiện của chúng trong các không gian compact, từ đó ứng dụng để khảo sát đại số các toán tử vi phân bất biến trên không gian compact vừa xây dựng cảm sinh từ đại số các toán tử vi phân bất biến trên không gian đối xứng ban đầu.

Một chủ đề quan trọng khác liên quan đến hình học symplectic và không gian đối xứng là thể hiện các định lý lỗi của Kostant cho các nhóm Lie nửa đơn liên thông theo quan điểm của hình học symplectic và phát triển các kết quả này cho trường hợp không gian đối xứng nửa đơn. Nhiều kết quả thú vị đã được thể hiện trong các công trình của B. Kostant, M.F. Atiyah, V. Guillemin và S. Sternberg, E.P. Van den Ban,... liên quan đến chủ đề này. Cho đến nay, bài toán compact hóa các không gian đối xứng nửa đơn và các chủ đề liên quan trong lý thuyết Lie vẫn đang được quan tâm nghiên cứu và có nhiều hướng phát triển mở rộng.

Bên cạnh đó, việc mô tả các dạng vi phân Kahler và khảo sát cấu trúc môđun của các dạng vi phân Kahler là một trong các chủ đề liên quan có nhiều ứng dụng trong hình học đại số và đại số máy tính. Nhiều ứng dụng quan trọng của vi phân Kahler đã được nghiên cứu và thể hiện trong các công trình của E. Kunz, R. Waldi, L. G. Roberts, and J. Johnson. Đặc biệt, vào năm 1955, P. Catier đã đề xuất một phương pháp tiếp cận khác để mô tả các đại số vi phân Kahler theo ngôn ngữ đại số phân bậc và các hàm Hilbert tương ứng. Tiếp đó, trong [KLL], M. Kreuzer, N. K. L. Tran và N. L. Le đã chỉ ra rằng có thể tính hàm Hilbert của môđun các 1-dạng vi phân Kahler dựa vào các hàm Hilbert của hai lược đồ điểm béo trong không gian xạ ảnh  $n$ -chiều. Hơn nữa, từ kết

quả trên có thể ứng dụng để xác định các đa thức Hilbert của các môđun này. Nhiều câu hỏi thú vị liên quan đến nội dung trên đang được đặt ra và có nhiều hướng phát triển, ứng dụng trong hình học đại số.

Trong hình học xạ ảnh, các không gian xạ ảnh thực hoặc phức  $n$ -chiều đóng một vai trò quan trọng và có mối liên hệ mật thiết với một số lĩnh vực liên quan như hình học vi phân, không gian đối xứng, đại số giao hoán, hình học đại số,... Đối với không gian xạ ảnh thực  $n$ -chiều  $\mathbb{R}P^n$ , thông qua tác động đẳng cự của nhóm trực giao đặc biệt  $SO(n+1)$  có thể đồng nhất  $\mathbb{R}P^n$  với không gian đối xứng nửa đơn thuộc loại compact  $SO(n+1)/SO(n)$ . Tương tự, không gian xạ ảnh phức  $\mathbb{C}P^n$  được xét như là một không gian đối xứng cảm sinh từ metric "Fubini-Study", một metric Kähler xác định bởi cấu trúc chẵn hình của đa tạp phức  $\mathbb{C}P^n$ . Hơn nữa, qua tác động đẳng cự của nhóm unita đặc biệt  $SU(n+1)$  có thể đồng nhất  $\mathbb{C}P^n$  với không gian đối xứng nửa đơn thuộc loại compact  $SU(n+1)/S(U(n) \times U(1))$ .

Đối với bài toán nghiên cứu cấu trúc và sự thể hiện của không gian đối xứng nửa đơn  $X = G/K$  thuộc loại Riemann trong không gian compact, với  $G$  là một nhóm Lie nửa đơn, thực, liên thông có tâm hữu hạn và  $K$  là nhóm con compact cực đại của  $G$  xác định bởi phép đối hợp Cartan  $\theta$ , trước hết chúng ta cần compact hóa thành phần vector  $A$  trong phân tích Cartan của nhóm Lie  $G = KAK$ , tức là xây dựng một không gian compact sao cho trên đó trang bị một cấu trúc đa tạp giải tích thực, mở rộng của thành phần vector  $A$ .

Với mỗi  $a \in A_{\mathbb{C}}$  và  $\alpha \in \Sigma$  ta định nghĩa  $a^\alpha = e^{\alpha \log a} \in \mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$  và xét tập hợp con

$$A_{\mathbb{R}} = \{ a \in A_{\mathbb{C}} \mid a^\alpha \in \mathbb{R}, \forall \alpha \in \Sigma \},$$

với  $\Sigma$  là một hệ căn nghiệm cho trước tương ứng với đại số Lie  $\mathfrak{g}$  của  $G$ . Gọi  $(\mathbb{C}^*)^\Sigma$  là tập hợp các bộ số phức  $z = (z_\beta)_{\beta \in \Sigma}$ , với  $z_\beta \in \mathbb{C}^*$ . Khi đó ta xác định được ánh xạ

$$\varphi : A_{\mathbb{C}} \longrightarrow (\mathbb{C}^*)^\Sigma, \quad a \mapsto \varphi(a) = (a^\alpha)_{\alpha \in \Sigma}.$$

Trong [DV1], dựa trên phép nhúng tự nhiên của  $(\mathbb{C}^*)^\Sigma$  trong  $(\mathbb{C}P^1)^\Sigma$ , với  $\mathbb{C}P^1$

là không gian xạ ảnh phức 1-chiều, chúng tôi đã xây dựng một phép nhúng của  $A_{\mathbb{R}}$  vào trong một đa tạp giải tích thực compact  $\widehat{A}_{\mathbb{R}}$ , với  $\widehat{A}_{\mathbb{R}}$  được định nghĩa là bao đóng của  $\varphi(A_{\mathbb{R}})$  trong  $(\mathbb{R}P^1)^{\Sigma}$ .

Tiếp đó, dựa vào tác động của nhóm Weyl cảm sinh lên không gian compact  $\widehat{A}_{\mathbb{R}}$ , chúng tôi đã xây dựng một đa tạp giải tích thực compact  $\widehat{X}$  sao cho không gian đối xứng  $X = G/K$  được thể hiện như là một tập con mở trong  $\widehat{X}$  và  $G$  tác động một cách giải tích lên đa tạp compact này. Cấu trúc giải tích thực trên  $\widehat{X}$  được xây dựng dựa vào cấu trúc giải tích thực đã được xác định trên compact hóa  $\widehat{A}_{\mathbb{R}}$  và một số kỹ thuật tính toán được vận dụng từ phép dựng của T. Oshima [Oshi1] cho các không gian đối xứng nửa đơn thuộc loại Riemann. Phép dựng này cũng được mở rộng cho trường hợp không gian đối xứng nửa đơn  $X = G/H$ , với  $H$  là một nhóm con đóng của  $G$  thỏa mãn  $G_e^{\sigma} \subset H \subset G^{\sigma}$ , trong đó  $G^{\sigma}$  là tập hợp các điểm cố định của phép đối hợp  $\sigma$  cho trước của  $G$  và  $G_e^{\sigma}$  là thành phần liên thông của đơn vị [DV2].

Bên cạnh đó, bài toán xác định chỉ số chính quy của tập các điểm béo trong không gian xạ ảnh và bài toán mô tả cấu trúc của đại số các dạng vi phân Kahler đối với các lược đồ 0-chiều trong không gian xạ ảnh  $n$ -chiều là các bài toán mang tính thời sự và có ý nghĩa trong đại số giao hoán, đang được nhiều nhà toán học trong và ngoài nước giải quyết cho một số trường hợp cụ thể.

Đối với bài toán mô tả các dạng vi phân Kähler và khảo sát cấu trúc môđun của các dạng vi phân Kähler, trên cơ sở các kết quả thể hiện trong công trình [KLL] của M. Kreuzer, N. K. L. Tran, N. L. Le, chúng tôi tiếp tục khảo sát các tính chất của đại số các dạng vi phân Kähler đối với các lược đồ 0-chiều trong không gian xạ ảnh  $n$ -chiều. Qua việc nghiên cứu này, một số kết quả thể hiện một trong luận án tiến sĩ của TS. Trần Nguyễn Khánh Linh (bảo vệ năm 2015), thành viên đề tài, có thể được phát triển, mở rộng thêm nhiều tính chất có ý nghĩa của đại số các dạng vi phân Kähler đối với các lược đồ 0-chiều trong không gian xạ ảnh  $n$ -chiều.

Với mong muốn được tiếp tục phát triển các kết quả đã đạt được về sự thể

hiện của không gian đối xứng trong không gian compact và các tính chất của đại số vi phân Kähler trong không gian xạ ảnh  $n$ -chiều như đã trình bày ở trên, chúng tôi chọn đề tài "*Phép nhúng compact và các toán tử vi phân bất biến của không gian đối xứng nửa đơn*" để triển khai nghiên cứu trong đề tài cấp Đại học Huế của mình.

Mục tiêu của đề tài là xây dựng một phép nhúng compact cho các không gian đối xứng nửa đơn thuộc loại Riemann và xác định đại số các toán tử vi phân bất biến trên không gian compact hóa vừa xây dựng; khảo sát các mở rộng của định lý lỗi Kostant cho nhóm Lie nửa đơn liên thông và khảo sát đại số các dạng vi phân Kahler cho các lược đồ chiều không trong không gian xạ ảnh  $n$ -chiều.

Các nội dung nghiên cứu cụ thể của đề tài bao gồm:

- Xây dựng một phép nhúng compact cho các không gian đối xứng nửa đơn thuộc loại Riemann và xác định đại số các toán tử vi phân bất biến trên không gian compact vừa xây dựng.

**Demo Version - Select.Pdf SDK**

- Khảo sát mở rộng của định lý lỗi Kostant không tuyến tính cho nhóm Lie nửa đơn liên thông theo quan điểm của hình học symplectic và thể hiện trên các quỹ đạo liên hợp, đối liên hợp; các quỹ đạo trong không gian compact hóa.

- Khảo sát các tính chất của đại số các dạng vi phân Kahler đối với các lược đồ chiều không trong không gian xạ ảnh  $n$ -chiều.

Về cấu trúc, nội dung nghiên cứu và kết quả của đề tài được trình bày trong hai chương:

Chương 1 trình bày các kết quả của đề tài liên quan đến việc xây dựng một phép nhúng compact cho các không gian đối xứng nửa đơn thuộc loại Riemann và xác định đại số các toán tử vi phân bất biến trên không gian compact vừa xây dựng; khảo sát các mở rộng của định lý lỗi Kostant cho nhóm Lie nửa đơn liên thông theo quan điểm của hình học symplectic và thể hiện trên các quỹ đạo liên hợp, đối liên hợp, các quỹ đạo mở của không gian compact hóa.

Chương 2 trình bày các kết quả của đề tài liên quan đến việc khảo sát các tính chất của đại số các dạng vi phân Kahler đối với các lược đồ chiều không trong không gian xạ ảnh  $n$ -chiều, bao gồm việc khảo sát môđun vi phân Kähler  $m$ -dạng  $\Omega_{R_{\mathbb{X}}/K}^m$ , xác định hàm Hilbert của  $\Omega_{R_{\mathbb{W}}/K}^m$  đối với tập các điểm béo  $\mathbb{W}$  và đa thức Hilbert của  $\Omega_{R_{\mathbb{W}}/K}^{n+1}$  đối với lược đồ các điểm béo  $\mathbb{W}$ , lược đồ các điểm béo có giá nằm trên đường cong bậc hai trơn và đại số vi phân Kähler của  $R_{\mathbb{X}}/K[x_0]$ .

Mặc dù nhóm đề tài đã có nhiều cố gắng nhưng việc trình bày các kết quả nghiên cứu khó tránh khỏi những sai sót. Rất mong nhận được những ý kiến đóng góp của quý đồng nghiệp và các bạn để các kết quả nghiên cứu của đề tài được hoàn thiện hơn./.

**Demo Version - Select.Pdf SDK**

## B. CÁC KẾT QUẢ CỦA ĐỀ TÀI

Nội dung nghiên cứu và kết quả của đề tài được trình bày trong hai chương:

Chương 1 trình bày các kết quả của đề tài liên quan đến việc xây dựng một phép nhúng compact cho các không gian đối xứng nửa đơn thuộc loại Riemann và xác định đại số các toán tử vi phân bất biến trên không gian compact hóa vừa xây dựng; khảo sát mở rộng của định lý lồi Kostant cho nhóm Lie nửa đơn liên thông theo quan điểm của hình học symplectic và thể hiện trên các quỹ đạo liên hợp, đối liên hợp; các quỹ đạo mở của không gian compact hóa.

Chương 2 trình bày các kết quả của đề tài liên quan đến việc khảo sát các tính chất của đại số các dạng vi phân Kähler đối với các lược đồ chiều không trong không gian xạ ảnh  $n$ -chiều thể hiện qua việc khảo sát môđun vi phân Kähler  $m$ -dạng  $\Omega_{R_{\mathbb{X}}/K}^m$ , xác định hàm Hilbert của  $\Omega_{R_{\mathbb{W}}/K}^m$  đối với tập các điểm bé  $\mathbb{W}$  và đa thức Hilbert của  $\Omega_{R_{\mathbb{W}}/K}^{m+1}$  đối với tập các điểm bé  $\mathbb{W}$ , lược đồ các điểm bé có giá nằm trên đường cong bậc hai trơn và đại số vi phân Kähler của  $R_{\mathbb{X}}/K[x_0]$ .