ĐẠI HỌC HUẾ

TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

o0o

BÁO CÁO TỔNG KẾT

ĐỀ TÀI KHOA HỌC VÀ CÔNG NGHỆ CẤP ĐẠI HỌC HUẾ

ÁNH XẠ HỮU TỈ VÀ MỘT SỐ VẤN ĐỀ LIÊN QUAN ĐẾN IĐÊAN CƠ SỞ

Mã số: DHH2019-03-114

Chủ nhiệm đề tài: TS. Trần Quang Hoá

Huế, 11/2020

ĐẠI HỌC HUẾ
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

o0o

BÁO CÁO TỔNG KẾT
ĐỀ TÀI KHOA HỌC VÀ CÔNG NGHỆ CẤP ĐẠI HỌC HUẾ

ÁNH XẠ HỮU TỈ VÀ MỘT SỐ VẤN ĐỀ LIÊN QUAN ĐẾN IĐÊAN CƠ SỞ

Mã số: DHH2019-03-114

Xác nhận của cơ quan chủ trì đề tài
(Ký, họ và tên, đóng dấu)

Chủ nhiệm đề tài
(Ký, họ và tên)

TS. Trần Quang Hoá

Huế, 11/2020

DANH SÁCH CÁC THÀNH VIÊN THAM GIA ĐỀ TÀI

1. ThS. Hồ Vũ Ngọc Phương
   Trường Đại học Khoa học – Đại học Huế.

2. ThS. Văn Đức Trung
   Trường Đại học Sư phạm – Đại học Huế.

Mục lục

DANH MỤC CÁC KÝ HIỆU

Ký hiệu	**Nghĩa ký hiệu**
$\mathbb{N}$	Tập hợp các số tự nhiên
$\mathbb{Z}$	Tập các số nguyên
$\mathbb{Q}$	Tập hợp các số hữu tỉ
$\mathbb{R}$	Tập hợp các số thực
$\mathbb{C}$	Tập hợp các số phức
k	Trường k
$p = \mathrm{char}(k)$	Đặc số của trường k
$\mathbb{P}^m_k$	Không gian xạ ảnh m-chiều trên k
$R = k[X_0, \ldots, X_m]$	Vành toạ độ thuần nhất của $\mathbb{P}^m_k$
$\mathbf{f} = f_0, \ldots, f_n$	Dãy các đa thức thuần nhất $f_0, \ldots, f_n$
$\gcd(f_0, \ldots, f_n)$	Ước chung lớn nhất của $f_0, \ldots, f_n$
$I = (f_0, \ldots, f_n)$	Iđêan sinh bởi các đa thức thuần nhất $f_0, \ldots, f_n$ của R
$\mathcal{B} = \mathrm{Proj}(R/I)$	Lược đồ xạ ảnh con của $\mathbb{P}^m_k$ định nghĩa bởi iđêan phân bậc I
$\phi : \mathbb{P}^m_k \dashrightarrow \mathbb{P}^n_k$	Ánh xạ hữu tỉ định nghĩa bởi $f_0, \ldots, f_n$
$\mathscr{S} = \overline{\phi(\mathbb{P}^m_k \setminus \mathcal{B})}$	Ảnh đóng của ánh xạ hữu tỉ ϕ
$\Gamma \subset \mathbb{P}^m_k \times \mathbb{P}^n_k$	Bao đóng Zariski của đồ thị của ϕ
$\pi : \Gamma \longrightarrow \mathbb{P}^n_k$	Phép chiếu chính tắc
$B = k[T_0, \ldots, T_n]$	Vành toạ độ thuần nhất của $\mathbb{P}^n_k$
$S = R[T_0, \ldots, T_n]$	Vành đa thức của các biến $T_0, \ldots, T_n$ trên vành R
$\mathcal{R}_{\mathcal{I}} = \mathrm{Rees}_R(I)$	Đại số Rees của iđêan I
$\mathcal{S}_{\mathcal{I}} = \mathrm{Sym}_R(I)$	Đại số đối xứng của iđêan I
$\mathcal{K}$	Hạt nhân của toàn cấu $\delta : \mathcal{S}_{\mathcal{I}} \longrightarrow \mathcal{R}_{\mathcal{I}}$
$k(y)$	Trường thặng dư của $y \in \mathbb{P}^n_k$
$\pi^{-1}(y)$	Ảnh ngược của π tại $y \in \mathbb{P}^n_k$
$\mathcal{Y}_\ell$	Tập các điểm $y \in \mathbb{P}^n_k$ có ảnh ngược ℓ-chiều
h_y	Phương trình định nghĩa thành phần $(m-1)$-chiều của $\pi^{-1}(y)$
$h_y = h_1^{e_1} \cdots h_{r_y}^{e_{r_y}}$	Phân tích thành nhân tử bất khả quy của h_y trong R.
$\mathbf{X} = X_0, \ldots, X_m$	Dãy các biến của R
$\mathbf{T} = T_0, \ldots, T_n$	Dãy các biến của B
$k[f_0, \ldots, f_n]$	Vành đa thức của các phần tử $f_0, \ldots, f_n$ trên k
$k(f_0, \ldots, f_n)$	Trường các hàm hữu tỉ của vành $k[f_0, \ldots, f_n]$
$[k(\mathbf{f}) : k(\mathbf{X})]$	Mở rộng trường $k(\mathbf{f})$ trên trường $k(\mathbf{X})$
$\frac{\partial f_i}{\partial X_j}$	Đạo hàm riêng của đa thức f_i theo biến X_j
$J(\mathbf{f})$	Ma trận Jacobi ứng với dãy $\mathbf{f}$

$I_s(J(\mathbf{f}))$	Iđêan của R sinh ra bởi các định thức con cấp $s \times s$ của $J(\mathbf{f})$
$\mathfrak{m} = (X_0, \ldots, X_m)$	Iđêan phân bậc cực đại của R
$J^{\text{sat}} = J :_R \mathfrak{m}^\infty$	Iđêan ổn định của iđêan J của R
$H^i_{\mathfrak{m}}(M)$	Đối đồng điều địa phương thứ i của môđun M
HP_N	Đa thức Hilbert của môđun N
HF_N	Hàm Hilbert của môđun N
$\binom{n}{k}$	Tổ hợp chập k của n phần tử
$[M]_{\mathcal{I},\mathcal{J}}$	Định thức của ma trận con của M có dòng và cột được chỉ số bởi $\mathcal{I}$ và $\mathcal{J}$
$\operatorname{codim}(I)$	Đối chiều của iđêan I
$\deg(f)$	Bậc của đa thức f
$\deg(M)$	Bậc của môđun M
$\deg(\mathcal{B})$	Bậc của đa tạp xạ ảnh $\mathcal{B}$
$\dim(M)$	Chiều Krull của môđun M
$\operatorname{indeg}(M)$	Bậc dẫn đầu của môđun M
$\operatorname{Ker}(\varphi)$	Hạt nhân của một đồng cấu φ
$\operatorname{Proj}(S/J)$	Lược đồ xạ ảnh định nghĩa bởi iđêan J của vành S
$\operatorname{rank}(A)$	Hạng của ma trận A
$\operatorname{reg}(M)$	Chỉ số chính quy Castelnuovo-Mumford của môđun M
$\operatorname{Supp}_R(M)$	Support của R-môđun M
$\operatorname{Syz}(I)$	Môđun của các syzygy của iđêan I

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

ĐẠI HỌC HUẾ

THÔNG TIN KẾT QUẢ NGHIÊN CỨU
ĐỀ TÀI KHOA HỌC VÀ CÔNG NGHỆ CẤP ĐẠI HỌC HUẾ

1. Thông tin chung

1.1 **Tên đề tài:** Ánh xạ hữu tỉ và một số vấn đề liên quan đến iđêan cơ sở.

1.2 **Mã số:** DHH2019-03-114.

1.3 **Chủ nhiệm đề tài:** TS. Trần Quang Hoá.

1.4 **Cơ quan chủ trì:** Trường Đại học Sư phạm - Đại học Huế.

1.5 **Thời gian thực hiện:** 01/01/2019 đến 31/12/2020.

2. Mục tiêu nghiên cứu

Mục tiêu của đề tài là nghiên cứu ảnh ngược của ánh xạ hữu tỉ, trong mối liên hệ với iđêan cơ sở của nó. Chính xác hơn, ký hiệu $\mathbb{P}_k^m$ là không gian xạ ảnh m-chiều trên một trường đóng đại số k và vành toạ độ thuần nhất của nó là $R = k[X_0, \ldots, X_m]$. Một ánh xạ hữu tỉ $\phi : \mathbb{P}_k^m \dashrightarrow \mathbb{P}_k^n$ được định nghĩa bởi các đa thức thuần nhất $f_0, \ldots, f_n \in R$ có cùng bậc d. Ký hiệu $I = (f_0, \ldots, f_n)$ là iđêan của R sinh ra bởi các đa thức $f_0, \ldots, f_n$, ta gọi nó là *iđêan cơ sở* của ϕ. Xét $\Gamma \subset \mathbb{P}_k^m \times \mathbb{P}_k^n$ là bao đóng Zariski của đồ thị của ϕ và $\pi : \Gamma \longrightarrow \mathbb{P}_k^n$ là phép chiếu chính tắc. Mục tiêu của đề tài là:

(i) Thiết lập chặn trên cho lực lượng của tập hợp

$$\mathcal{Y}_{m-1} = \{y \in \mathbb{P}_k^n \mid \dim \pi^{-1}(y) = m - 1\}$$

theo d.

(ii) Nghiên cứu mối liên hệ giữa ảnh ngược của ánh xạ hữu tỉ và giá, bậc của B-môđun phân bậc hữu hạn sinh

$$N = \oplus_{s \geq 0} H_{\mathfrak{m}}^m (I^s)_{sd-m},$$

trong đó $\mathfrak{m} = (X_0, \ldots, X_m)$ là iđêan phân bậc cực đại của R và $B = k[T_0, \ldots, T_n]$ là vành toạ độ thuần nhất của $\mathbb{P}^n_k$.

(iii) Trong trường hợp $\phi : \mathbb{P}^2_k \dashrightarrow \mathbb{P}^3_k$ là một tham số mặt. Chúng tôi sẽ thiết lập một số chặn cho bậc và chỉ số chính quy Castelnuovo-Mumford của B-môđun phân bậc hữu hạn sinh

$$N = \oplus_{s \geq 0} H^2_{\mathfrak{m}}(I^s)_{sd-2}.$$

3. Tính mới và tính sáng tạo

Các nội dung nghiên cứu của đề tài góp phần phát triển các kết quả đã đạt được về nghiên cứu ảnh và ảnh ngược của ánh xạ hữu tỉ. Đề tài nghiên cứu những tính chất mới về ảnh ngược của ánh xạ hữu tỉ. Ngoài ra, đề tài cũng nghiên cứu mối liên hệ giữa ảnh ngược của ánh xạ hữu tỉ và các bất biến đại số của môđun đối đồng điều địa phương của đại số Rees như giá, bậc. Kết quả chính của đề tài là một cải thiện đáng kể và cũng là một tổng quát hoá các kết quả của bài báo [33].

4. Các kết quả nghiên cứu thu được

Đề tài đã hoàn thành các mục tiêu đã đề ra và đã thu được một số kết quả chính sau đây:

(a) Nghiên cứu ảnh ngược của ánh xạ hữu tỉ $\phi : \mathbb{P}^m_k \dashrightarrow \mathbb{P}^n_k$. Chính xác hơn, chúng tôi nghiên cứu lực lượng của tập hợp

$$\mathcal{Y}_{m-1} = \{y \in \mathbb{P}^n_k \mid \dim \pi^{-1}(y) = m-1\}$$

trong mối liên hệ với ma trận Jacobi của $\mathbf{f} := f_0, \ldots, f_n$

$$J(\mathbf{f}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_0}{\partial X_0} & \cdots & \frac{\partial f_0}{\partial X_m} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial X_0} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial X_m} \end{pmatrix}.$$

Ký hiệu $I_s(J(\mathbf{f}))$ là iđêan của R sinh ra bởi các định thức con cấp $s \times s$ của $J(\mathbf{f})$, với mỗi $1 \leq s \leq m+1$. Với mỗi $y \in \mathcal{Y}_{m-1}$, ký hiệu h_y là phương trình định nghĩa của thành phần $(m-1)$-chiều của $\pi^{-1}(y)$. Khi đó, chúng tôi đã chứng minh rằng: Giả sử $I_3(J(\mathbf{f})) \neq 0$ và gọi F là ước chung lớn nhất của các phần tử sinh của $I_3(J(\mathbf{f}))$. Khi đó

$$\sum_{y \in \mathcal{Y}_{m-1}} \deg(h_y) \leq \sum_{y \in \mathcal{Y}_{m-1}} \sum_{i=1}^{r_y} (2e_i - 1) \deg(h_i) \leq \deg(F) \leq 3(d-1),$$

trong đó $h_y = h_1^{e_1} \cdots h_{r_y}^{e_{r_y}}$ là một phân tích thành nhân tử bất khả quy của h_y trong R.

(b) Nghiên cứu mối quan hệ giữa ảnh ngược của ánh xạ hữu tỉ và một số bất biến của môđun đối đồng điều địa phương của đại số Rees. Chính xác hơn, xét B-môđun phân bậc hữu hạn sinh

$$N = \oplus_{s \geq 0} H_{\mathfrak{m}}^m (I^s)_{sd-m}.$$

Khi đó, chúng tôi đã chứng minh rằng:

(i) $\mathrm{Supp}_B(N) = \mathcal{Y}_{m-1}$ và $\dim(N) = 1$.

(ii) $\deg(N) = \sum_{y \in \mathcal{Y}_{m-1}} \binom{\deg(h_y)+m-1}{m}$.

(c) Trong trường hợp $\phi : \mathbb{P}_k^2 \dashrightarrow \mathbb{P}_k^3$ là một tham số mặt. Khi đó, chúng tôi đã thiết lập những chặn cho bậc và cho chỉ số chính quy Castelnuovo-Mumford của N như sau:

$$\mathrm{reg}(N) \leq n \quad \text{và} \quad \deg(N) \leq \binom{n+2}{3},$$

ở đây $n = \dim_k H_{\mathfrak{m}}^1(R/I)_{d-2}$, dưới điều kiện $\mathcal{B}$ là một giao đầy đủ địa phương. Hơn nữa, nếu $\mathrm{indeg}(I^{\mathrm{sat}}) = d$ và $\mathcal{B}$ là một giao đầy đủ địa phương thì

(i) $n = \deg(\mathcal{B}) - \frac{1}{2}d(d-1)$.

(ii) $\frac{1}{2}d(d+1) \leq \deg(\mathcal{B}) \leq d^2 - 2d + 3$.

(ii) $d \leq n \leq \frac{1}{2}d(d-3) + 3$.

5. Các sản phẩm của đề tài

5.1 Sản phẩm nghiên cứu

Kết quả của đề tài đã được công bố trong hai bài báo, trong đó một bài báo quốc tế uy tín thuộc danh mục ISI (SCI, Q1) và một bài báo trong nước:

1. Journal of Algebra. Article in press, 2019, 15 pages.
   DOI: 10.1016/j.jalgebra.2019.01.035.
   Tên bài báo: Fibers of rational maps and Jacobian matrices.
   Tác giả: Marc Chardin, Steven Dale Cutkosky, Quang Hoa Tran.

2. Hue University Journal of Science: Natural Science 2020, Vol 129, No 1B, Pages: 5–14. DOI: 10.26459/hueuni-jns.v129i2A.5349.
   Tên bài báo: Fibers of rational maps and Rees algebra of their base.
   Tác giả: Tran Quang Hoa, Ho Vu Ngoc Phuong.

5.2 Sản phẩm đào tạo

Chủ nhiệm đề tài đã hướng dẫn thành công một Luận văn Thạc sĩ có nội dung liên quan đến đề tài:
Học viên: Nguyễn Thị Thu Trang.
Tên đề tài: Phương trình tham số và phương trình xấp xỉ của đường cong đại số hữu tỉ phẳng.
Ngày bảo vệ Luận văn: 01/12/2019.

6. Các đóng góp, khả năng ứng dụng và phương thức chuyển giao kết quả nghiên cứu

Kết quả nghiên cứu của đề tài có thể phát triển thành bài giảng chuyên đề cao học và/hoặc làm tài liệu tham khảo cho các học viên cao học và nghiên cứu sinh chuyên ngành Đại số – Lý thuyết số. Nó cũng là một tài liệu tham khảo cho các nhà Toán học quan tâm nghiên cứu về ánh xạ hữu tỉ và một số vấn đề trong Đại số giao hoán.

Ngày 4 tháng 11 năm 2020

Cơ quan chủ trì	Chủ nhiệm đề tài
(ký, họ và tên, đóng dấu)	*(ký, họ và tên)*
	TS. Trần Quang Hoá

MINISTRY OF EDUCATION AND TRAINING
HUE UNIVERSITY

INFORMATION ON STUDY RESULTS
RESEARCH PROJECT ASSIGNED BY HUE UNIVERSITY

1. General information of project

1.1 **Project tilte:** Rational maps and some problems related to their base ideals.

1.2 **Project code:** DHH2019-03-114.

1.3 **Coordinator:** Dr. Tran Quang Hoa.

1.4 **Implementing institution:** University of Education – Hue University.

1.5 **Implementing duration:** From 01/01/2019 to 31/12/2020.

2. Study objectives

The aim of the project is to study the fibers of rational maps in relation to their base ideals. More presisely, we denote by $\mathbb{P}_k^m$ the m-dimensional projective space over an algebraically closed field k and by $R = k[X_0, \ldots, X_m]$ the homogeneous coordinate ring of $\mathbb{P}_k^m$. A rational map $\phi : \mathbb{P}_k^m \dashrightarrow \mathbb{P}_k^n$ is defined by homogeneous polynomials $f_0, \ldots, f_n \in R$ of the same degree d. Denote by $I = (f_0, \ldots, f_n)$ the ideal of R generated by polynomials $f_0, \ldots, f_n$, called *base ideal* of ϕ. Let $\Gamma \subset \mathbb{P}_k^m \times \mathbb{P}_k^n$ be the Zariski closure of the graph of ϕ and $\pi : \Gamma \longrightarrow \mathbb{P}_k^n$ be the canonical projection. Our goal is to:

(i) Establish an upper bound for the cardinality of the set

$$\mathcal{Y}_{m-1} = \{p \in \mathbb{P}_k^n \mid \dim \pi^{-1}(p) = m-1\}$$

in terms of d.

(ii) Study the relation between the fibers of rational maps and the support, the degree of the finitely generated B-module

$$N = \oplus_{s \geq 0} H_{\mathfrak{m}}^m(I^s)_{sd-m},$$

where $\mathfrak{m} = (X_0, \ldots, X_m)$ is the homogeneous maximal ideal of R and $B = k[T_0, \ldots, T_n]$ is the homogeneous coordinate ring of $\mathbb{P}_k^n$.

(iii) In the case where $\phi : \mathbb{P}^2_k \dashrightarrow \mathbb{P}^3_k$ is a parameterization of surface. Then we will establish a bound for the Castelnuovo-Mumford regularity and the degree of the finitely generated B-module

$$N = \oplus_{s\geq 0} H^2_{\mathfrak{m}}(I^s)_{sd-2}.$$

3. Novelty and creativeness of the study

The results of the project contribute to the development of the results obtained Algebaric Geometry and Commutative Algebra, in particular the study of images and fibers of rational maps. The project investigates new properties of fibers of rational maps. Moreover, the project also studies the relationship between the fibers of rational map and the algebraic invariants of the local cohomology module of the Rees algebra such as its support and its degree. The main result of the project is a significant improvement and a generalization of the results in the paper [33].

4. Main study results

The project has completed its objectives and has achieved the following main results:

(a) Study the fibers of rational maps $\phi : \mathbb{P}^m_k \dashrightarrow \mathbb{P}^n_k$. More precisely, we study the cardinality of the set

$$\mathcal{Y}_{m-1} = \{y \in \mathbb{P}^n_k \mid \dim \pi^{-1}(y) = m-1\}$$

in the relation to the Jacobian matrix of $\mathbf{f} := f_0, \ldots, f_n$

$$J(\mathbf{f}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_0}{\partial X_0} & \cdots & \frac{\partial f_0}{\partial X_m} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial X_0} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial X_m} \end{pmatrix}.$$

Denote by $I_s(J(\mathbf{f}))$ the ideal of R generated by the $s \times s$ minors of $J(\mathbf{f})$, where $1 \leq s \leq m+1$. For each $y \in \mathcal{Y}_{m-1}$, we denote by $h_y \in R$ the defining equation of the unmixed part of the fiber $\pi^{-1}(y)$. Then, we showed the following: Assume $I_3(J(\mathbf{f})) \neq 0$ and denote by F the greatest common divisor of generators of $I_3(J(\mathbf{f}))$. Then

$$\sum_{y \in \mathcal{Y}_{m-1}} \deg(h_y) \leq \sum_{y \in \mathcal{Y}_{m-1}} \sum_{i=1}^{r_y} (2e_i - 1)\deg(h_i) \leq \deg(F) \leq 3(d-1),$$

where $h_y = h_1^{e_1} \cdots h_{r_y}^{e_{r_y}}$ is an irreducible factorization of h_y in R.

(b) Study the relationship between the fibers of rational maps and some algebraic invariants of local cohomology modules of the Rees algebra of I. More precisely, consider the finitely generated B-module

$$N = \oplus_{s\geq 0} H^m_{\mathfrak{m}}(I^s)_{sd-m}.$$

Then, we proved the following.

(i) $\mathrm{Supp}_B(N) = \mathcal{Y}_{m-1}$ and $\dim(N) = 1$.

(ii) $\deg(N) = \sum_{y\in\mathcal{Y}_{m-1}} \binom{\deg(h_y)+m-1}{m}$.

(c) In the case where $\phi : \mathbb{P}^2_k \dashrightarrow \mathbb{P}^3_k$ is a parameterization of surface. Then we established a bound for the Castelnuovo-Mumford regularity and the degree of B-module N in terms of n as follows:

$$\mathrm{reg}(N) \leq n \quad \text{and} \quad \deg(N) \leq \binom{n+2}{3},$$

where $n = \dim_k H^1_{\mathfrak{m}}(R/I)_{d-2}$, under the assumption that $\mathcal{B}$ is locally a complete intersection. Furthermore, if $\mathrm{indeg}(I^{\mathrm{sat}}) = d$ and $\mathcal{B}$ is locally a complete intersection, then

(i) $n = \deg(\mathcal{B}) - \frac{1}{2}d(d-1)$.

(ii) $\frac{1}{2}d(d+1) \leq \deg(\mathcal{B}) \leq d^2 - 2d + 3$.

(ii) $d \leq n \leq \frac{1}{2}d(d-3) + 3$.

5. Project outputs

5.1 Publications:

Results of the project have published in the following two papers.

1. Journal of Algebra. Article in press, 2019, 15 pages.
   DOI: 10.1016/j.jalgebra.2019.01.035.
   Title: Fibers of rational maps and Jacobian matrices.
   Authors: Marc Chardin, Steven Dale Cutkosky, Quang Hoa Tran.

2. Hue University Journal of Science: Natural Science 2020, Vol 129, No 1B, Pages: 5–14. DOI: 10.26459/hueuni-jns.v129i2A.5349.
   Title: Fibers of rational maps and Rees algebra of their base.
   Authors: Tran Quang Hoa, Ho Vu Ngoc Phuong.

5.2 Training and education:

There was a Master Thesis carried out following this study approach and it was successfully defended on 01/12/2019.
Master student: Nguyen Thi Thu Trang.
Thesis title: Parametric equations and implicit equations of rational algebraic curves.

6. Contributions, application possibility and ways of transfer of study results

Study results of the project can be developed into a thematic lecture and/or a good reference for post-graduate students and PhD students in Algebra and Number theory. It is also a good reference for readers who are interested in studying the images and the fibers of rational maps and some problems related in Commutative Algebra.

November 4, 2020

Implementation institution	**Project coordinator**
(sign and seal)	*(sign and full name)*
	Dr. Tran Quang Hoa

A. TỔNG QUAN VỀ VẤN ĐỀ NGHIÊN CỨU

Ánh xạ hữu tỉ là đối tượng cơ bản trong hình học đại số. Chúng được sử dụng để mô tả các đối tượng hình học, chẳng hạn như biểu diễn tham số của các đa tạp đại số hữu tỉ, và chúng xuất hiện trong các lĩnh vực ứng dụng như kỹ thuật máy tính, đồ họa,.... Tham số hóa của các đường cong đại số và mặt đại số được ứng dụng một cách mạnh mẽ để mô tả các đối tượng trong hình học mô hình, chẳng hạn như mô hình hoá thân xe, máy bay và các hình động trong phim hoạt hình,....

Do đó, việc nghiên cứu các ánh xạ hữu tỉ không chỉ được quan tâm trong cộng đồng các nhà hình học đại số và đại số giao hoán, mà còn có tầm quan trọng thực tế trong cộng động các nhà hình học mô hình.

Ký hiệu $\mathbb{P}_k^m$ là không gian xạ ảnh m-chiều trên một trường đóng đại số k. Xét ánh xạ hữu tỉ $\phi : \mathbb{P}_k^m \dashrightarrow \mathbb{P}_k^n$ được định nghĩa bởi các đa thức thuần nhất $f_0, \ldots, f_n$ có cùng bậc d trong vành đa thức phân bậc chuẩn $R = k[X_0, \ldots, X_m]$ thoả mãn $\gcd(f_0, \ldots, f_n) = 1$. Iđêan I của R sinh ra bởi các đa thức này được gọi là *iđêan cơ sở của* ϕ. Lược đồ xạ ảnh $\mathcal{B} := \operatorname{Proj}(R/I) \subset \mathbb{P}_k^m$ được gọi là *lược đồ cơ sở của* ϕ.

Ký hiệu $B = k[T_0, \ldots, T_n]$ là vành toạ độ thuần nhất của $\mathbb{P}_k^n$. Ánh xạ ϕ tương ứng một-một với một đồng cấu k-đại số

$$\begin{aligned} \varphi : B &\longrightarrow R \\ T_i &\mapsto f_i \end{aligned}$$

Khi đó, hạt nhân $\operatorname{Ker}(\varphi)$ định nghĩa ảnh đóng $\mathscr{S}$ của ϕ. Nói cách khác,

$$k[f_0, \ldots, f_n] \simeq B/\operatorname{Ker}(\varphi)$$

là vành toạ độ của $\mathscr{S}$. Hệ sinh tối tiểu của $\operatorname{Ker}(\varphi)$ được gọi là *các phương trình xấp xỉ* của ảnh đóng của ϕ và *bài toán xấp xỉ* là xác định các phương trình xấp xỉ này.

Bài toán xấp xỉ, đặc biệt cho các đường cong đại số và các mặt đại số, là một bài toán cơ bản và được quan tâm mạnh mẽ không chỉ trong cộng đồng các nhà đại số giao hoán và hình học đại số, mà cả trong cộng đồng các nhà toán ứng dụng, đặc biệt cộng đồng các nhà toán học sử dụng hình học mô hình để mô tả các đối tượng bằng đồ hoạ. David Cox [16] đã có những giải thích và làm sáng tỏ những ứng dụng quan trọng của chúng trong thiết kế đồ hoạ với sự trợ giúp của máy tính.

Gọi $\Gamma \subset \mathbb{P}_k^m \times \mathbb{P}_k^n$ là bao đóng Zariski của đồ thị của $\phi : \mathbb{P}_k^m \setminus \mathcal{B} \longrightarrow \mathbb{P}_k^n$. Khi đó, ta có sơ đồ giao hoán sau:

$$\begin{tikzcd} \Gamma \arrow[r, hook] \arrow[d, "\pi_1"'] & \mathbb{P}^m_k \times \mathbb{P}^n_k \arrow[d, "\pi_2"] \\ \mathbb{P}^m_k \arrow[r, dashed, "\phi"] & \mathbb{P}^n_k. \end{tikzcd}$$

Hơn nữa, Γ là lược đồ con bất khả quy của $\mathbb{P}^m_k \times \mathbb{P}^n_k$ định nghĩa bởi đại số Rees $\mathcal{R}_\mathcal{I}$ của I (xem [20, Chương II, §7]), nghĩa là $\mathrm{Proj}(\mathcal{R}_\mathcal{I}) = \Gamma$. Nhắc lại rằng đại số Rees của iđêan I là đại số phân bậc

$$\mathcal{R}_\mathcal{I} := R \oplus I \oplus I^2 \oplus I^3 \oplus \cdots = R[f_0t, \ldots, f_nt].$$

Đặt $S := R[T_0, \ldots, T_n]$. Khi đó, toàn cấu phân bậc

$$\begin{aligned} \alpha : \quad & S \longrightarrow \mathcal{R}_\mathcal{I} = R[f_0t, \ldots, f_nt] \\ & T_i \longmapsto f_it \end{aligned}$$

cảm sinh một đẳng cấu $\mathcal{R}_\mathcal{I} \simeq S/\operatorname{Ker}(\alpha)$. Hệ sinh tối tiểu của iđêan nguyên tố phân bậc $\operatorname{Ker}(\alpha) \subset S$ được gọi là các *phương trình định nghĩa của đại số Rees* của I. Từ $\mathcal{R}_\mathcal{I}$ là miền nguyên phân bậc định nghĩa Γ, phép chiếu chính tắc $\pi_2(\Gamma) = \mathscr{S}$ được định nghĩa bởi miền nguyên phân bậc $\mathcal{R}_\mathcal{I} \cap k[T_0, \ldots, T_n]$. Do đó, hệ sinh tối tiểu của $\operatorname{Ker}(\alpha) \cap k[T_0, \ldots, T_n]$ là các phương trình xấp xỉ của $\mathscr{S}$. Nói cách khác, chúng ta có thể tìm các phương trình xấp xỉ của $\mathscr{S}$ thông qua phương trình định nghĩa của đại số Rees $\mathcal{R}_\mathcal{I}$.

Tuy nhiên, đại số Rees là rất khó để nghiên cứu và vấn đề tìm các mô tả xấp xỉ của phương trình định nghĩa của đại số Rees là một vấn đề rất mở và rất khó. Chỉ một số rất ít lớp các iđêan đã được nghiên cứu và đưa ra phương trình định nghĩa của đại số Rees, được nghiên cứu bởi Huneke, Vasconcelos, Kustin, Polini, Ulrich,... (xem [3, 25, 26, 27, 28, 29, 34, 35]). May mắn thay, *đại số đối xứng* của iđêan I trên R

$$\mathcal{S}_\mathcal{I} := \mathrm{Sym}_R(I) = R \oplus I \oplus \mathrm{Sym}^2_R(I) \oplus \mathrm{Sym}^3_R(I) \oplus \cdots$$

là dễ dàng để hiểu hơn $\mathcal{R}_\mathcal{I}$ và hai đại số này có quan hệ mật thiết với nhau thông qua toàn cấu chính tắc $\delta : \mathcal{S}_\mathcal{I} \to \mathcal{R}_\mathcal{I}$. Nếu lược đồ cơ sở $\mathcal{B}$ của ϕ là một giao đầy đủ địa phương (tức là $I_\mathfrak{p}$ là một giao đầy đủ với mọi $\mathfrak{p} \in \mathcal{B}$) thì $\mathrm{Proj}(\mathcal{S}_\mathcal{I}) = \mathrm{Proj}(\mathcal{R}_\mathcal{I}) = \Gamma$. Do đó, dưới giả thiết này, chúng ta có thể tìm phương trình xấp xỉ của $\mathscr{S}$ thông qua các phương trình định nghĩa của $\mathcal{S}_\mathcal{I}$, tức là các *syzygy* của I

$$\mathrm{Syz}(I) = \{a_0T_0 + \cdots + a_nT_n \mid a_i \in R \text{ sao cho } a_0f_0 + \cdots + a_nf_n = 0\}.$$

Phương pháp sử dụng syzygy để tìm phương trình xấp xỉ của đường cong đại số và mặt đại số được giới thiệu bởi Chen and Sederberg ([31]) and Cox ([15, 14]).

Nó đã được tổng quát hoá bởi Jouanolou, Busé, Chardin, Botbol,... trong chuỗi các bài báo [1, 5, 6, 8, 11]. Một trong những công cụ chìa khoá của phương pháp này là sử dụng *phức xấp xỉ* đã giới thiệu bởi Herzog, Simis và Vasconcelos ([21]). Họ đã giới thiệu phức này để nghiên cứu đại số Rees và đại số đối xứng của iđêan trong [21, 22].

Vấn đề thứ hai được quan tâm khi nghiên cứu ánh xạ hữu tỉ là nghiên cứu tính kỳ dị của các tham số, cũng như của chính đa tạp đại số. Đầu tiên, Busé và các cộng sự của mình đã sử dụng syzygy để xây dựng một ma trận, gọi là *ma trận biểu diễn xấp xỉ* của tham số, và chuyển vấn đề nghiên cứu tính kỳ dị của tham số về việc nghiên cứu hạng của ma trận này, xem [2, 9, 10, 4, 18]. Phương pháp này đã được Lưu Bá Thắng sử dụng để nghiên cứu vấn đề giao và tự giao giữa các đa tạp, đặc biệt cho trường hợp các đường và/ hoặc các mặt trong Luận án Tiến sĩ của anh ta. Năm 1998, D. Cox, T. Sederberg and F. Chen [17] đã đưa ra khái niệm μ-cơ sở và sử dụng nó để nghiên cứu tính kỳ dị của ánh xạ hữu tỉ. Trong trường hợp tham số của các đường cong đại số, μ-cơ sở có mối quan hệ sâu sắc với tính kỳ dị của nó và được nghiên cứu rất mạnh mẽ. Nhiều kết quả đã thu được trong trường hợp tham số của các đường, xem [7, 23, 24, 32, 36]. Tuy nhiên, trong trường hợp tham số của mặt chỉ có rất ít kết quả theo hướng này. Một vài kết quả bước đầu có thể kể đến là các nghiên cứu trong [2, 30] và còn nhiều vấn đề mở quan trọng cần được nghiên cứu.

Tiếp nối các kết quả [2] về nghiên cứu ảnh ngược của ánh xạ hữu tỉ. Chủ nhiệm đề tài đã có một số kết quả về chặn trên cho số các ảnh ngược 1-chiều cho tham số mặt $\phi : \mathbb{P}^2_k \dashrightarrow \mathbb{P}^3_k$ trong [33]. Đề tài này nhằm mục đích tiếp tục nghiên cứu ảnh của ánh xạ hữu tỉ trong trường hợp tổng quát hơn. Chính xác hơn, chúng tôi quan tâm nghiên cứu ảnh ngược của

$$\pi := \pi_{2|\Gamma} : \Gamma \longrightarrow \mathbb{P}^n_k.$$

Với mỗi điểm đóng $y \in \mathbb{P}^n_k$, chúng ta ký hiệu $k(y)$ là trường thặng dư của y, nghĩa là $k(y) = (B_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}B_\mathfrak{p})_0$, ở đây $\mathfrak{p}$ là iđêan nguyên tố định nghĩa của y. Vì k là trường đóng đại số nên $k(y) \simeq k$. Ảnh ngược của π tại $y \in \mathbb{P}^n_k$ là lược đồ

$$\pi^{-1}(y) = \operatorname{Proj}(\mathcal{R}_\mathcal{I} \otimes_B k(y)) \subset \mathbb{P}^m_{k(y)} \simeq \mathbb{P}^m_k.$$

Khi đó, ta đặt

$$\mathcal{Y}_{m-1} = \{y \in \mathbb{P}^n_k \mid \dim \pi^{-1}(y) = m-1\} \subset \mathbb{P}^n_k.$$

Nếu $m \geq 2$ và ϕ là một tham số của một đa tạp xạ ảnh m-chiều thì $\mathcal{Y}_{m-1}$ là một tập hữu hạn. Trong [33], chủ nhiệm đề tài đã thiết lập một chặn trên cho $\mathcal{Y}_1$ trong trường hợp tham số mặt $\phi : \mathbb{P}^2_k \dashrightarrow \mathbb{P}^3_k$ như sau: Nếu $\mathcal{B}$ là một giao đầy đủ địa