ĐẠI HỌC HUẾ

TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

TRƯƠNG VŨ MINH TRIẾT

ĐỀ TÀI

MÔĐUN ĐỐI BẤT BIẾN QUA TỰ ĐẲNG CẤU CỦA PHỦ VÀ ỨNG DỤNG

Chuyên ngành: ĐẠI SỐ VÀ LÝ THUYẾT SỐ

LUẬN VĂN THẠC SĨ

THEO ĐỊNH HƯỚNG NGHIÊN CỨU

CÁN BỘ HƯỚNG DẪN KHOA HỌC

GS.TS. LÊ VĂN THUYẾT

Thành phố Huế - 2019

LỜI CAM ĐOAN

Tôi xin cam đoan đây là công trình nghiên cứu của riêng tôi, các số liệu và kết quả nghiên cứu ghi trong Luận văn là trung thực.

Trương Vũ Minh Triết

LỜI CẢM ƠN

Lời đầu tiên, tôi xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc đến GS.TS Lê Văn Thuyết, người Thầy đã tận tâm hướng dẫn, giúp đỡ và động viên tôi trong quá trình học tập tại lớp cao học cũng như quá trình hoàn thành Luận văn này.

Tôi xin chân thành cảm ơn quý Thầy, Cô khoa Toán trường Đại học Sư phạm - Đại học Huế đã truyền đạt cho tôi những kiến thức bổ ích, làm nền tảng để tôi hoàn thành Luận văn của mình.

Tôi cũng xin chân thành cảm ơn các anh, các chị, các bạn cao học viên Khóa K26 đã nhiệt tình giúp đỡ tôi trong suốt quá trình học tập.

Cuối cùng, tôi xin cảm ơn gia đình đã luôn động viên, giúp đỡ tôi vượt qua những khó khăn trong quá trình học tập, đặc biệt là trong quá trình hoàn thành Luận văn.

Trương Vũ Minh Triết

Mục lục

LỜI NÓI ĐẦU

Lý thuyết môđun là một bộ phận của lý thuyết đại số kết hợp, đã và đang được nhiều nhà toán học quan tâm. Việc nghiên cứu lý thuyết môđun cho đến ngày nay được phát triển mạnh mẽ và có nhiều ứng dụng quan trọng trong nghiên cứu lý thuyết vành. Một trong các hướng nghiên cứu vành là nghiên cứu đặc trưng vành qua tính chất của một lớp xác định nào đó các môđun trên chúng. Vì thế ngày nay có khá nhiều lớp môđun được nghiên cứu. Một trong các hướng nghiên cứu của lý thuyết này là nghiên cứu môđun xạ ảnh, rồi tựa xạ ảnh.

Vào năm 1961, Johnson và Wong đưa ra khái niệm môđun tựa nội xạ. Hai nhà toán học đã chứng minh được định lý bất biến: *M là môđun tựa nội xạ nếu và chỉ nếu M là một môđun con bất biến hoàn toàn của $E(M)$ (bao nội xạ của M), tức là, $\lambda M \supseteq M$, với mọi $\lambda \in End(E(M)_R)$*. Tiếp sau đó, Jain và Singh giới thiệu khái niệm môđun giả nội xạ vào năm 1967. Và đến năm 1969, Dickson và Fuller nghiên cứu về các môđun bất biến dưới các tự đồng cấu của bao nội xạ (tổng quát hóa khái niệm môđun tựa nội xạ). Mãi đến năm 2013, Lee và Zhou mới đưa ra khái niệm môđun bất biến dưới các tự đẳng cấu của bao nội xạ.

Về lịch sử quá trình nghiên cứu các lớp môđun xạ ảnh, vào năm 1967, Wu và Jans giới thiệu khái niệm môđun tựa xạ ảnh (nếu M là M - xạ ảnh, thì M cũng được gọi là tự – (hoặc tựa) xạ ảnh) và nghiên cứu một vài tính chất của các môđun này. Họ đã chứng minh được rằng môđun M, có phủ xạ ảnh $\pi : P \longrightarrow M$ là môđun tựa xạ ảnh nếu và chỉ nếu $Ker(P)$ bất biến dưới các tự đồng đồng cấu của P.

Sau đó, Mohamed, Singh và Muller đã nghiên cứu về môđun đối ngẫu tựa liên tục (môđun tựa rời rạc) và môđun đối ngẫu liên tục (môđun rời rạc) dưới các điều kiện $(D_1), (D_2)$ và (D_3). Chúng ta có thể xem xét các điều kiện $(D_1), (D_2)$

và (D_3) trên R - môđun phải M.

+ (D_1) Với môđun con A bất kỳ của M, tồn tại phân tích $M = M_1 \oplus M_2$ sao cho $M_1 \leq A$ và $A \cap M_2$ là môđun con đối cốt yếu trong M_2.

+ (D_2) Nếu với mọi môđun con N của M và M/N đẳng cấu với một hạng tử trực tiếp của M, thì N là hạng tử trực tiếp của M.

+ (D_3) Nếu A, B là hai hạng tử trực tiếp của M thỏa mãn $M = A + B$, thì $A \cap B$ là một hạng tử trực tiếp của M.

Khi đó, môđun M được gọi là môđun tựa rời rạc (rời rạc) nếu M thỏa hai điều kiện (D_1) và (D_3) (tương ứng hai điều kiện (D_1) và (D_2)).

Trong quá trình nghiên cứu, Mohamed, Singh và Muller đã thu được một vài đặc trưng quan trọng của các môđun tựa rời rạc và rời rạc, chẳng hạn như:

+ Cho M là R - môđun phải M với $f : P \longrightarrow M$ là phủ xạ ảnh sao cho mọi hạng tử trực tiếp của M có một phủ xạ ảnh.

+ R - môđun phải M trên vành hoàn chỉnh phải R với phủ xạ ảnh $f : P \longrightarrow M$ là môđun tựa rời rạc khi và chỉ khi $Ker(f)$ bất biến dưới mọi tự đồng cấu lũy đẳng của P.

Tiếp theo đó, vào năm 1976, L. Bican giới thiệu khái niệm môđun giả xạ ảnh. M là M - giả xạ ảnh thì nó được gọi là giả xạ ảnh. Trong đó, môđun M được gọi là N - giả xạ ảnh nếu mọi môđun con A của M và với toàn cấu bất kỳ $g : N \longrightarrow M/A$ có thể nâng được đồng cấu $f : N \longrightarrow M$, nghĩa là biểu đồ sau giao hoán:

$$\begin{tikzcd} & N \arrow[dl, dotted, "f"'] \arrow[d, "g"] & \\ M \arrow[r] & M/A \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Liên quan đến phủ xạ ảnh, ta có thể tổng quát khái niệm trên như sau: Theo Enochs and Jenda, cho $\mathcal{X}$ là lớp R - môđun đóng dưới các đẳng cấu. Đồng cấu $p : X \longrightarrow M$ được gọi là $\mathcal{X}$ - tiền phủ của môđun M với điều kiện $X \in \mathcal{X}$ và mỗi sơ đồ

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "p"] & M \\
& X' \arrow[u, "p'"'] \arrow[ul, "\alpha"]
\end{tikzcd}$$

với $X' \in \mathcal{X}$ có thể bổ sung bởi một đồng cấu $\alpha : X' \longrightarrow X$ để tạo thành một sơ đồ giao hoán. Ngoài ra, nếu sơ đồ

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "p"] & M \\
& X \arrow[u, "p"'] \arrow[ul, "\alpha"]
\end{tikzcd}$$

chỉ có thể chỉ bổ sung bởi một tự đẳng cấu α, khi đó ta gọi $p : X \longrightarrow M$ là $\mathcal{X}$ - phủ của M.

Vào năm 2012, S. Singh và A. K. Srivastava trong bài báo *Dual automorphism - invariant modules*, Journal of Algebra 371, 262-275, đã giới thiệu khái niệm môđun đối ngẫu tự đẳng cấu - bất biến, lớp môđun này giống như một chiếc cầu nối giữa lớp môđun giả xạ ảnh và lớp môđun tự đẳng cấu - đối bất biến.

Sau đó, vào năm 2015, P. A. Guil Asensio, D. K. Tütüncü và A. K. Srivastava trong bài báo *Modules invariant under automorphisms of their covers and envelopes*, Israel Journal of Mathematics, 206, 457-482, đã giới thiệu khái niệm môđun $\mathcal{X}$ - tự đẳng cấu - đối bất biến. Điều này chỉ ra vành tự đồng cấu của môđun $\mathcal{X}$ - tự đẳng cấu đối bất biến là nửa vành chính quy.

Dựa chủ yếu vào hai bài báo trên và xuất phát từ định hướng của Thầy hướng dẫn GS.TS. Lê Văn Thuyết, tôi đã chọn đề tài *Môđun đối bất biến qua tự đẳng cấu của phủ và ứng dụng* để làm đề tài nghiên cứu cho Luận văn này.

Mặc dù bản thân đã có nhiều cố gắng, song Luận văn khó tránh khỏi sự thiếu sót, rất mong nhận được sự góp ý từ quý Thầy (Cô) giáo cùng các anh, các chị, các bạn để Luận văn được hoàn thiện hơn.

Chương 1

MỘT SỐ KIẾN THỨC CHUẨN BỊ

Hầu hết các kiến thức trình bày trong chương này được trích dẫn từ các tài liệu [1], [20], [31],... Các kiến thức được trình bày trong chương này nhằm mục đích tham khảo cho các nội dung của chương sau.

Trong Luận văn này, vành R đã cho luôn được giả thiết là vành kết hợp có đơn vị $1 \neq 0$ và mọi R - môđun được xét là môđun unita.

Trong một ngữ cảnh cụ thể của Luận văn, nếu không có gì nhầm lẫn, khi ta viết môđun M tức M là một R - môđun phải. Tương tự, khi cho một đồng cấu giữa hai môđun và không nói gì thêm, ta hiểu đồng cấu đó là đồng cấu R - môđun phải. Đối với R - môđun phải M, ta thường viết $End(M)$ để chỉ các vành tự đồng cấu R - môđun phải của M.

Ta sẽ nói rằng S là *vành con* của vành R nếu $(S, +)$ là nhóm con của $(R, +)$, $(S, \cdot)$ là nửa nhóm con của $(R, \cdot)$, và S là vành. Ta nói rằng vành con S là *vành con unita* của R nếu $(S, \cdot)$ là nửa vị nhóm của $(R, \cdot)$.

Linh hóa tử phải của môđun M sẽ được kí hiệu là $r(M)$ và linh hóa tử phải phần tử m của M sẽ được kí hiệu là $r(m)$.

Cho M là R - môđun, và N là môđun con của M; môđun M được gọi là *bất biến hoàn toàn* đối với M nếu với mọi tự đồng cấu f của M ta có $f(N) \subseteq N$. Giao tất cả các môđun con cực đại của M được gọi là *căn Jacobson* của M và