ĐẠI HỌC HUẾ
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

PHẠM THỊ CHÂU GIANG

DẤU CỦA HỆ SỐ HILBERT CỦA IĐÊAN $\mathfrak{M}$-NGUYÊN SƠ

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC
THEO ĐỊNH HƯỚNG NGHIÊN CỨU

Thừa Thiên Huế, năm 2019

ĐẠI HỌC HUẾ
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

PHẠM THỊ CHÂU GIANG

DẤU CỦA HỆ SỐ HILBERT CỦA IĐÊAN $\mathfrak{m}$-NGUYÊN SƠ

Chuyên ngành: ĐẠI SỐ VÀ LÝ THUYẾT SỐ
Mã số: 8460104

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC
THEO ĐỊNH HƯỚNG NGHIÊN CỨU

CÁN BỘ HƯỚNG DẪN KHOA HỌC
PGS.TS. CAO HUY LINH

Thừa Thiên Huế, năm 2019

LỜI CAM ĐOAN

Tôi xin cam đoan đây là công trình nghiên cứu của riêng tôi, các số liệu và kết quả nghiên cứu ghi trong Luận văn là trung thực.

Phạm Thị Châu Giang

LỜI CẢM ƠN

Lời đầu tiên, tôi xin gửi lời cảm ơn chân thành nhất đến PGS.TS Cao Huy Linh, người Thầy đã hướng dẫn, giúp đỡ tôi trong suốt quá trình Thầy giảng dạy tại lớp Cao học Khóa 26 và nhất là quá trình tôi hoàn thành Luận văn này.

Tôi xin bày tỏ lòng cảm ơn đến quý Thầy, Cô trong tổ bộ môn Đại số nói riêng và toàn thể quý Thầy, Cô khoa Toán trường Đại học Sư phạm Huế nói chung đã tận tình giảng dạy, truyền đạt cho tôi những kiến thức bổ ích, làm nền tảng để tôi hoàn thành Luận văn của mình.

Tôi cũng xin chân thành cảm ơn các bạn, các anh, chị cao học viên Khóa 26 đã giúp đỡ tôi trong suốt quá trình học tập.

Tôi xin cảm ơn gia đình và bạn bè đã luôn động viên, giúp đỡ tôi vượt qua những khó khăn trong quá trình học tập và hoàn thành Luận văn.

Cuối cùng, dù đã rất cố gắng, song Luận văn không tránh khỏi những thiếu sót. Tôi kính mong quý Thầy, Cô và hội đồng chấm Luận văn góp ý cho những thiếu sót trong Luận văn này.

Phạm Thị Châu Giang

Mục lục

MỞ ĐẦU

Hàm Hilbert là một trong những khái niệm cơ bản của lĩnh vực Đại số giao hoán và có nhiều liên hệ mật thiết với các bất biến khác như số mũ rút gọn, chỉ số Hilbert, chỉ số chính quy Castelnuovo-Mumford. Việc nghiên cứu hàm Hilbert sẽ cho chúng ta nhiều thông tin về cấu trúc của vành và môđun tương ứng.

Cho $(A, \mathfrak{m})$ là vành địa phương. Giả sử M là một A-môđun chiều d và I là iđêan định nghĩa của M. Khi đó hàm Hilbert-Samuel, hay gọi tắt là hàm Hilbert của môđun M ứng với iđêan I là một hàm số học xác định bởi

$$\begin{aligned} H_{I,M} : \mathbb{Z} &\longrightarrow \mathbb{Z} \\ n &\longmapsto H_{I,M}(n) := \lambda_R(M/I^n M), \end{aligned}$$

trong đó $\lambda_R(M/I^n M)$ là độ dài môđun $M/I^n M$. Samuel là người đầu tiên chỉ ra rằng tồn tại một đa thức $P_{I,M}(x)$ bậc d với hệ số hữu tỷ sao cho $H_{I,M}(n) = P_{I,M}(n)$ với n đủ lớn. Đa thức này được gọi là đa thức Hilbert (hay Hilbert-Samuel) của môđun M ứng với iđêan I và nó có thể được viết dưới dạng

$$P_{I,M}(n) = e_0(I, M)\binom{n+d-1}{d} - e_1(I, M)\binom{n+d-2}{d-1} + \cdots + (-1)^d e_d(I, M).$$

trong đó $e_i(I, M)$; $i = 0, 1, \ldots, d$ là các số nguyên và được gọi là hệ số Hilbert của môđun M ứng với iđêan I. Đặc biệt hệ số dẫn đầu $e_0(I, M)$ được gọi là hệ số bội và hệ số $e_1(I, M)$ được gọi là hệ số Chern.

Mục đích chính của Luận văn là tổng quan các kết quả về tính không dương của hệ số Hilbert của iđêan tham số. Từ đó chúng tôi khảo sát dấu của hệ số Hilbert của iđêan $\mathfrak{m}$-nguyên sơ.

Năm 2008, Vasconcelos đã đưa ra giả thuyết về tính âm của hệ số Chern: *"Vành A không Cohen-Macaulay nếu và chỉ nếu $e_1(Q) < 0$ với Q là iđêan tham số của A."* Giả thuyết này thu hút sự quan tâm của nhiều nhà toán học và được nhóm nghiên cứu của Goto chứng minh trọn vẹn vào năm 2010. Năm 2011, nhóm tác giả Mandal-Sing-Verma [13] đã chứng minh được tính không dương của hệ số Chern của iđêan tham số bất kỳ. Tuy nhiên các hệ số Hilbert khác của iđêan tham số có thể dương.

Năm 2013, Lori McCune [16] đã chứng minh được rằng nếu $(A, \mathfrak{m})$ là vành

Noether địa phương có chiều d và depth $A \geq d-1$ thì $e_2(Q) \leq 0$ với Q là iđêan tham số của A. Với giả thiết depth $G_Q(A) \geq d-1$, Lori McCune [16] cũng chứng minh được $e_i(Q) \leq 0$ với $i = 1, \ldots, d$. Tuy nhiên giả thiết depth $G_Q(A) \geq d-1$ mà McCune đưa ra khá mạnh. Năm 2019, Linh-Trung [11] đã cải tiến kết quả của McCune bằng cách giảm nhẹ giả thiết depth $G_Q(A) \geq d-1$ là depth $G_Q(A) \geq d-2$ thì thu được $e_i(Q) \leq 0$ với $i = 1, \ldots, d$.

Kết quả chính của Luận văn là tổng quan các kết quả về tính không dương của hệ số Hilbert của iđêan tham số. Từ đó chúng tôi khảo sát dấu của hệ số Hilbert của iđêan $\mathfrak{m}$-nguyên sơ. Đây là một số kết quả mới mà chúng tôi đạt được.

Luận văn được chia làm hai chương. Trong chương 1, chúng tôi trình bày một số kiến thức cơ bản của Đại số giao hoán bao gồm Định nghĩa và một số Bổ đề nhằm hỗ trợ cho các chứng minh ở chương sau. Trong chương 2, chúng tôi tập trung vào nội dung chính của Luận văn là tổng quan các kết quả về tính không dương của hệ số Hilbert của iđêan tham số, khảo sát dấu của hệ số Hilbert của iđêan $\mathfrak{m}$-nguyên sơ.

Mặc dù bản thân đã cố gắng, song Luận văn khó tránh khỏi một số thiếu sót, rất mong nhận được sự góp ý từ quý Thầy, Cô cùng các bạn để Luận văn được hoàn thiện hơn.

CHƯƠNG 1

MỘT SỐ KIẾN THỨC CHUẨN BỊ

Trong chương này, chúng tôi trình bày một số kiến thức cơ bản của đại số giao hoán đó là chiều của vành và môđun, vành nhân tử hóa và địa phương hóa, dãy chính quy và độ sâu, vành Cohen-Maucaulay và vành hầu Cohen-Maucaulay, iđêan nguyên sơ và iđêan tham số, vành và môđun phân bậc, độ dài của môđun, hàm Hilbert và hệ số Hilbert của môđun phân bậc, đối đồng điều địa phương, chỉ số chính quy Castelnuovo-Mumford của vành phân bậc liên kết và số mũ rút gọn của iđêan $\mathfrak{m}$-nguyên sơ. Các kiến thức này nhằm chuẩn bị cho những nội dung cơ bản ở chương sau. Hầu hết các kiến thức trong chương này được trích dẫn từ các tài liệu [2], [4], [15], [18] theo cách tóm tắt lại các kết quả chính. Do đó, một số chứng minh Bổ đề, Mệnh đề, Định lý không trình bày lại. Trong suốt chương này, R luôn là vành giao hoán có đơn vị.

1.1 Chiều của vành và môđun

Định nghĩa 1.1.1.

(1) Cho R là một vành, với mỗi dãy giảm (thực sự) các iđêan nguyên tố của vành R

$$\mathfrak{p}_0 \supset \mathfrak{p}_1 \supset \ldots \supset \mathfrak{p}_d$$

ta gọi d là độ dài của dãy. Chiều của vành R là độ dài lớn nhất của các dãy giảm các iđêan nguyên tố của R, kí hiệu là $\dim R$. Tức là,
$\dim R := \sup \left\{ d \mid \exists\ \mathfrak{p}_0 \supset \mathfrak{p}_1 \supset \ldots \supset \mathfrak{p}_d \text{ là dãy các iđêan nguyên tố của } R \right\}$.

(2) Cho M là một R-môđun, chiều của môđun M là

$$\dim_R M := \dim R/\mathrm{ann}_R(M)$$