ĐẠI HỌC HUẾ
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

LÊ VĂN LUÂN

NGHIỆM TIẾN, NGHIỆM LÙI VÀ TÍNH CHÍNH QUY ĐỐI VỚI NGHIỆM VISCOSITY CỦA PHƯƠNG TRÌNH HAMILTON-JACOBI

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

THEO ĐỊNH HƯỚNG NGHIÊN CỨU

Thừa Thiên Huế, năm 2019

ĐẠI HỌC HUẾ
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

LÊ VĂN LUÂN

NGHIỆM TIẾN, NGHIỆM LÙI VÀ TÍNH CHÍNH QUY ĐỐI VỚI NGHIỆM VISCOSITY CỦA PHƯƠNG TRÌNH HAMILTON-JACOBI

Chuyên ngành: Toán giải tích

Mã số: 8460102

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

THEO ĐỊNH HƯỚNG NGHIÊN CỨU

Người hướng dẫn khoa học: PGS.TS Nguyễn Hoàng

Thừa Thiên Huế, năm 2019

Lời cam đoan

Tôi xin cam đoan đây là công trình nghiên cứu của riêng tôi, các số liệu và kết quả nghiên cứu ghi trong luận văn là trung thực, được các đồng tác giả cho phép sử dụng và chưa từng được công bố trong bất kì một công trình nào khác.

Lê Văn Luân

Lời cảm ơn

Trong quá trình thực hiện luận văn, tôi nhận được rất nhiều sự giúp đỡ và hỗ trợ từ các thầy, cô và bạn bè. Lời đầu tiên, tôi muốn cảm ơn đến người hướng dẫn luận văn, PGS. TS Nguyễn Hoàng. Thầy đã giành thời gian để hướng dẫn tận tình, chu đáo. Nếu không có sự chỉ dạy và hướng dẫn tận tình của thầy thì luận văn không thể hoàn thành tốt được.

Tôi cũng gửi lời cảm ơn đến quý thầy, cô Khoa Toán, trường Đại học Sư Phạm Huế đã tận tình giảng dạy, hướng dẫn và giúp đỡ để tôi có thể hoàn thành luận văn này.

Cuối cùng, tôi cảm ơn gia đình và bạn bè, những người luôn động viên, hỗ trợ tôi trong suốt quá trình thực hiện luận văn.

Huế, tháng 8 năm 2019

Học viên

Lê Văn Luân

Lời nói đầu

Phương trình đạo hàm riêng phi tuyến nói chung và phương trình Hamilton-Jacobi (phương trình đạo hàm riêng phi tuyến cấp 1 dạng $u_t + H(t, x, Du) = 0$) nói riêng là một nội dung quan trọng của toán học và nhiều lĩnh vực khác. Nó được nhiều nhà toán học trên thế giới quan tâm và có nhiều kết quả nghiên cứu có ý nghĩa to lớn trong toán học nói chung và phương trình đạo hàm riêng nói riêng. Một phương trình đạo hàm riêng phi tuyến cấp 1 có thể được giải bằng nhiều phương pháp khác nhau, nhưng nhìn chung tương đối phức tạp. Một trong những phương pháp thường sử dụng để giải các phương trình đó là phương pháp đặc trưng.

Khi giải phương trình đạo hàm riêng phi tuyến cấp 1 bằng phương pháp đặc trưng chúng ta thấy rằng nếu đường đặc trưng không cắt nhau thì nghiệm của phương trình là nghiệm trơn nếu điều kiện đầu trơn. Việc khảo sát tính trơn của nghiệm của các phương trình là một nội dung quan trọng trong phương trình đạo hàm riêng nói chung và phương trình Hamilton-Jacobi nói riêng. Một câu hỏi đặt ra là: với điều kiện nào thì nghiệm của một phương trình là nghiệm trơn?

Như đã nói ở trên, khi giải phương trình bằng phương pháp đặc trưng, tính trơn của nghiệm phụ thuộc vào điều kiện ban đầu. Do đó, chúng ta mong đợi rằng thông tin về điều kiện ban đầu sẽ không bị mất đi khi thời gian thay đổi, khi đó đường đặc trưng sẽ không cắt nhau và do đó nghiệm là nghiệm trơn. Vấn đề là làm thế nào để thông tin ban đầu không bị mất đi khi thời gian thay đổi. Luận văn này sẽ trình bày cách tiếp cận vấn đề trên và trả lời câu hỏi khi nào nghiệm của phương trình sẽ là nghiệm trơn? Ở đây, chúng ta sử dụng hai khái niệm xuyên suốt là "nghiệm tiến", "nghiệm lùi" của phương trình Hamilton-Jacobi dạng $u_t + H(t, x, Du) = 0$. Giả sử $u(t, x)$ là một hàm số xác định trên $[0, T] \times \mathbb{R}^n$, đặt $v(t, x) = u(T - t, x)$. Ta thấy rằng nếu u thuộc lớp C^1 và u là một nghiệm của phương trình $u_t + H(t, x, Du) = 0$ thì v là một nghiệm của phương trình $v_t - H(T - t, x, Dv) = 0$. Ta gọi u là một "nghiệm tiến" của phương trình nếu nó là một nghiệm viscosity theo

nghĩa thông thường, u là một "nghiệm lùi" nếu $v(t,x) = u(T-t,x)$ là một nghiệm viscosity của phương trình $v_t - H(T-t,x,Dv) = 0$. Trong luận văn này, chúng ta xét bài toán $u_t + H(t,x,Du) = 0$ với điều kiện đầu $u(0,x) = g(x)$ và giải nó theo thời gian đến thời điểm T. Sau đó, chúng ta xét bài toán $w_t + H(t,x,Dw) = 0$ và giải lùi theo thời gian với điều kiện cuối $w(T,x) = u(T,x)$. Từ đó, chúng ta sẽ giải quyết ba câu hỏi sau:
(i) Giả sử $w \equiv u$ trên $[0,T] \times \mathbb{R}^n$, ta có thể suy ra u, w đều thuộc lớp C^1 hay không?
(ii) Nếu chỉ có giả thiết $w(0,x) = u(0,x)$, ta có thể suy ra rằng $w \equiv u$ trên $[0,T] \times \mathbb{R}^n$ và u, w đều thuộc lớp C^1 hay không?
(iii) Trong trường hợp tổng quát, nghiệm lùi w của phương trình $w_t + H(t,x,Dw) = 0$ với điều kiện $w(T,x) = u(T,x)$ có thuộc lớp C^1 hay không?
Luận văn được chia thành ba chương với nội dung cụ thể như sau:

Chương I: Các kiến thức chuẩn bị. Trong chương này trình bày một số kiến thức liên quan, được sử dụng thường xuyên trong luận văn. Chẳng hạn, các định nghĩa, tính chất về nghiệm viscosity, hàm nửa lồi, nửa lõm, sơ lược về phép toán biến phân và đặc biệt đưa ra định nghĩa nghiệm tiến, nghiệm lùi cho phương tình Hamilton-Jacobi.

Chương II: Tính chính quy của nghiệm viscosity cho phương trình $u_t + H(t,x,Du) = 0$. Đây là nội dung chính của luận văn, trong chương này sẽ trả lời được câu hỏi khi nào nghiệm của phương trình Hamilton-Jacobi là chính quy.

Chương III: Công thức Hopf cho bài toán (H,σ) và tính chính quy của nghiệm. Trong chương này, chúng ta xét trường hợp đặc biệt của phương trình Hamilton-Jacobi với dạng $u_t + H(Du) = 0$ (Hamitonian H không phụ thuộc vào biến t và x).

Hi vọng rằng luận văn là một tài liệu để các sinh viên, học viên cao học ngành toán tham khảo trong quá trình học tập và nghiên cứu.

Mục lục

DANH MỤC CÁC KÍ HIỆU, CHỮ VIẾT TẮT

B_R	Hình cầu tâm 0 bán kính R
$B(x_0, r)$	Hình cầu mở tâm x_0, bán kính r
$B'(x_0, r)$	Hình cầu đóng tâm x_0, bán kính r
$C(\Omega)$	Tập hợp các hàm số f liên tục trên Ω
$C^1(\Omega)$	Tập hợp các hàm số khả vi liên tục trên Ω
$f_n \rightrightarrows f$	Dãy hàm f_n hội tụ đều về hàm f
$H_{pp}(t, x, p)$	Đạo hàm cấp hai của hàm H theo biến p
Hàm D.C	Hàm số được tạo thành từ hiệu của hai hàm lồi
Lip$(\mathbb{R}^n)$	Lớp các hàm số Lipschitz trên không gian $\mathbb{R}^n$
$L^p(\Omega)$	Tập hợp các hàm p-khả tích, tức là $L^P(\Omega) = \left\{ u(x) : \int\limits_{\Omega} \lvert u(x) \rvert^p dx < +\infty \right\}, \ p \leqslant 1$
Lip$_{loc}(\Omega)$	Tập hợp các hàm liên tục Lipschitz địa phương trong Ω.
$\mathbb{R}_+$	Tập hợp các số thực dương
mes$G$	Độ đo của tập G
$W^{1,1}(\Omega)$	Tập hợp các hàm $\{u(x) \vert u(x) \in L^1(\Omega), D_{x_i} u \in L^1(\Omega), \forall i\}$
$\lvert x \rvert$	Chuẩn Euclid trong $\mathbb{R}^n$