

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO  
ĐẠI HỌC HUẾ  
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

PHAN THỌ

# MỘT SỐ TÍNH CHẤT CỦA PHỦ PHẪNG

Chuyên ngành: Đại số và lý thuyết số

Mã số: 60.46.01  
**Demo Version - Select Full SDK**

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Cán bộ hướng dẫn khoa học  
GS.TS. Lê Văn Thuyết

HUẾ, 2015

# LỜI CAM ĐOAN

Tôi xin cam đoan đây là công trình nghiên cứu của riêng tôi, các số liệu và kết quả nghiên cứu ghi trong luận văn là trung thực, được các đồng tác giả cho phép sử dụng và chưa từng được công bố trong bất kỳ một công trình nào khác.

Họ tên tác giả

Phan Thọ.

**Demo Version - Select.Pdf SDK**

# LỜI CẢM ƠN

Luận văn này được hoàn thành dưới sự hướng dẫn khoa học rất tận tình của GS.TS Lê Văn Thuyết. Tác giả xin được bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc vì sự quan tâm, giúp đỡ và tạo điều kiện tối đa trong quá trình thực hiện luận văn.

Tôi cũng xin gửi lời cảm ơn sâu sắc đến quý thầy cô giáo trong Khoa Toán, Phòng Đào Tạo Sau Đại Học, Trường Đại học Sư phạm Huế đã tận tâm truyền đạt kiến thức cho tôi trong suốt quá trình học Cao học.

Cuối cùng xin gửi lời cảm ơn sâu sắc đến những người thân, các anh chị, các bạn học viên cao học khóa K22 đã luôn quan tâm giúp đỡ tôi trong suốt thời gian học tập.

*Huế, Ngày 21 tháng 9 năm 2015*

Học viên thực hiện

Phan Thọ.

**Demo Version - Select.Pdf SDK**

# MỤC LỤC

Lời cam đoan .....	i
Lời cảm ơn .....	ii
Mục lục .....	1
Bảng kí hiệu .....	2
Mở đầu .....	3
Chương 1. Một số kiến thức cơ bản về môđun .....	6
1.1. Một số khái niệm cơ bản về môđun .....	6
1.2. Hàm tử Hom và Hàm tử Tenxơ .....	10
1.3. Môđun nội xạ, môđun xạ ảnh và môđun phẳng .....	12
1.4. Môđun Ext .....	16
1.5. Vòng chăt chẽ .....	22
1.6. Giới hạn thuận - Giới hạn nghịch .....	23
1.7. Buông - Nút .....	25
<b>Demo Version - Select.Pdf SDK</b>	
Chương 2. Phủ của môđun .....	28
2.1. Khái niệm phủ .....	28
2.2. Một số tính chất của phủ .....	30
Chương 3. Phủ phẳng của môđun .....	43
3.1. Định nghĩa và ví dụ .....	43
3.2. Tính chất của phủ phẳng .....	44
3.3. Các định lý quan trọng của phủ phẳng .....	51
Kết luận .....	57
Tài liệu tham khảo .....	58

# BẢNG KÍ HIỆU

$M_R$	$M$ là $R$ -môđun phải
${}_R M$	$M$ là $R$ -môđun trái
$E(M)$	Bao nội xạ của môđun $M$
$P(M)$	Phủ xạ ảnh của môđun $M$
$PE(M)$	Bao nội xạ thuần túy của môđun $M$
$\mathcal{L}^\perp$	Lớp trực giao phải
${}^\perp \mathcal{L}$	Lớp trực giao trái
$N \leq M$	$N$ là môđun con của $M$
$N < M$	$N$ là môđun con thực sự của $M$
$N \leq^e M$	$N$ là môđun con cốt yếu (lớn) của $M$
$N \leq^\oplus M$	$N$ là hạng tử trực tiếp của $M$
$N \ll M$	$N$ là môđun con đối cốt yếu (bé) của $M$
$N \leq^{\max} M$	$N$ là môđun cực đại của $M$
$M^{(I)}$	Tổng trực tiếp của $ I $ các bản sao của môđun $M$
$M^I$	Tích trực tiếp của $ I $ các bản sao của môđun $M$
$M^*$	$\text{Hom}_R(M_R, R_R)$
$\mathcal{M}_R$	Phạm trù các $R$ -môđun phải
$Ab$	Phạm trù các nhóm aben

# MỞ ĐẦU

Lý thuyết vành và môđun là một bộ phận của lý thuyết đại số kết hợp, đã và đang được phát triển mạnh mẽ, với sự quan tâm của nhiều nhà toán học. Một trong các hướng nghiên cứu của lý thuyết này là việc nghiên cứu “phủ phẳng” của môđun.

Trước hết, chúng tôi xin đề cập đến môđun nội xạ. Khái niệm môđun nội xạ được Bear giới thiệu vào năm 1940. Tiêu chuẩn Baer về môđun nội xạ phát biểu rằng: “Một  $R$ -môđun phải  $E$  là nội xạ khi và chỉ khi với mọi idêan phải  $I$  của vành  $R$ , và với mọi đồng cấu  $R$ -môđun phải  $\beta : I \rightarrow E$  thì tồn tại đồng cấu  $R$ -môđun phải  $\alpha : R \rightarrow E$  sao cho:  $\alpha i = \beta$ , với  $i$  là đồng cấu bao hàm”.

Từ khái niệm nội xạ ban đầu, nhiều khái niệm và kết quả mới đã được hình thành và nghiên cứu. Chẳng hạn, Eckmann và Schopf đã chứng minh được sự tồn tại của các bao nội xạ của môđun trên bất kỳ vành kết hợp  $R$  và Matlis nghiên cứu định lý cấu trúc của môđun nội xạ trên vành Noether. Các khái niệm môđun nội xạ và bao nội xạ đóng một vai trò quan trọng trong lý thuyết vành và môđun, và đã có một tác động rất lớn về đại số đồng điều và đại số giao hoán.

**Demo Version - Select.Pdf SDK**

Tiếp theo, khái niệm của một môđun phẳng được giới thiệu bởi J.P. Serre trong bài báo [11] nổi tiếng của ông năm 1956. Trong đó, môđun phẳng định nghĩa như sau: một  $R$ -môđun phải  $B$  được gọi là môđun phẳng nếu hàm tử  $B \otimes_R -$  là hàm tử khớp. Tức là, với mọi dãy khớp ngắn các  $R$ -môđun trái:

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P \longrightarrow 0$$

thì dãy cảm sinh các nhóm aben tương ứng từ hàm tử  $B \otimes_R -$

$$0 \longrightarrow B \otimes_R M \xrightarrow{1 \otimes_R f} B \otimes_R N \xrightarrow{1 \otimes_R g} B \otimes_R P \longrightarrow 0$$

là dãy khớp.

Tại thời điểm đó, khái niệm phủ xạ ảnh đối ngẫu với bao nội xạ bắt đầu được nghiên cứu. Trong đó, bao nội xạ của  $R$ -môđun  $M$  kí hiệu là  $E(M)$  được định nghĩa là môđun nội xạ  $E$  bé nhất chứa  $M$ , một số sách còn định nghĩa: đơn cấu  $\alpha : M \rightarrow E$  được gọi là bao nội xạ của môđun  $M$  nếu  $E$  là môđun nội xạ và  $\alpha$  là đơn cấu cốt yếu (tức là  $\text{Im} \alpha \leq^e E$ ). Còn phủ xạ ảnh của môđun  $M$  kí hiệu là  $P(M)$  được định nghĩa

là: môđun xạ ảnh  $P$  và toàn cấu  $\beta : P \longrightarrow M$  gọi là phủ xạ ảnh của môđun  $M$  nếu  $P$  là môđun xạ ảnh và  $\beta$  là toàn cấu đối cốt yếu (tức là  $\text{Ker}\beta \ll P$ ).

Trong năm 1959 ở Đại học Chicago đã có luận án của H. Bass và sau đó là bài báo [3] nghiên cứu về phủ xạ ảnh của một môđun. Ông đặc trưng lớp vành  $R$  trong đó mỗi môđun có một phủ xạ ảnh và đó chính là vành hoàn chỉnh. Ông đã chứng minh rằng mỗi phủ xạ ảnh cũng là phủ phẳng (mặc dù Bass đã không sử dụng thuật ngữ này).

Điều này mặc nhiên đặt ra câu hỏi là :“*mỗi môđun có một phủ phẳng hay không?*”.

Câu hỏi này đã không được trả lời tường minh cho đến năm 1981. Trong công trình của E. Enochs [8] thì chỉ chứng minh rằng nếu một môđun có một tiên phủ phẳng, thì nó có một phủ phẳng. Điều này làm tăng thêm động lực cho việc nghiên cứu các vấn đề này. Tuy nhiên, việc này rất khó và tiến triển rất chậm cho đến năm 1995, J. Xu trong [13] đã chứng minh rằng phủ phẳng tồn tại trên vành Noether giao hoán có chiều Krull hữu hạn. Tác phẩm của ông đã giúp cho nhiều người biết đến vấn đề này, và đóng góp vào việc tìm ra giải pháp cho việc chứng minh giả thuyết trên. Vấn đề này quan trọng đến mức khi nói đến đối ngẫu về sự tồn tại của bao nội xạ, người ta có thể nói đến người tiên phong. Mãi cho đến năm 2001, L. Bican, R. El Bashir và E. Enochs trong [4] đã chứng minh được giả thuyết trên là đúng.

Với lý do như trên và mong muốn tìm hiểu thêm về “phủ phẳng”, hơn nữa được sự định hướng của thầy giáo hướng dẫn GS.TS Lê Văn Thuyết, tôi đã mạnh dạn chọn đề tài “**Một số tính chất của phủ phẳng**” để tiến hành nghiên cứu với hi vọng có thể tìm hiểu sâu hơn về các tính chất của chúng và mục tiêu là nêu ra các bước của việc giải quyết giả thuyết trên.

Mục tiêu của luận văn là trình bày, làm rõ một số tính chất của phủ phẳng. Đặc biệt, tập trung chứng minh được tính chất “*mọi môđun đều có một phủ phẳng*”. Nội dung nghiên cứu của luận văn là phủ phẳng và một số tính chất của phủ phẳng. Dự kiến với mục tiêu và nội dung này, luận văn được chia là ba Chương:

Chương 1: Trình bày một số kiến thức cơ bản về môđun, môđun nội xạ, môđun xạ ảnh, môđun phẳng, môđun Ext, vành chặt chẽ, giới hạn thuận, giới hạn ngược,...

Chương 2: Trình bày định nghĩa, ví dụ và một số tính chất của phủ môđun.

Chương 3: Trình bày định nghĩa, ví dụ và một số tính chất của phủ phẳng. Các

định lý quan trọng của phủ phẳng,...

Mặc dù đã có nhiều cố gắng, song trong quá trình nghiên cứu và trình bày khó tránh khỏi các sai sót, mong quý độc giả góp ý thêm để luận văn được hoàn thiện hơn.

*Huế, Ngày 21 tháng 9 năm 2015*

Học viên thực hiện

Phan Thọ.

**Demo Version - Select.Pdf SDK**