BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
ĐẠI HỌC HUẾ
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

DƯƠNG BÁ ĐẠT

SỰ SUY RỘNG CỦA IĐÊAN NGUYÊN TỐ

Chuyên ngành: Đại số và Lý thuyết số
Mã số: 60.46.01.04

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Cán bộ hướng dẫn khoa học:
PGS.TS. PHAN VĂN THIỆN

Huế, Năm 2015

LỜI CAM ĐOAN

Tôi xin cam đoan đây là công trình nghiên cứu của riêng tôi, các số liệu và kết quả nghiên cứu nêu trong Luận văn là trung thực, được các đồng tác giả cho phép sử dụng và chưa từng được công bố trong bất kỳ một công trình nào khác.

Dương Bá Đạt

LỜI CẢM ƠN

Lời đầu, tôi xin được bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới PGS.TS Phan Văn Thiện - người Thầy đã trực tiếp hướng dẫn và chỉ bảo tôi trong suốt quá trình tôi thực hiện Luận văn này.

Tôi xin chân thành cảm ơn quý Thầy giáo, Cô giáo khoa Toán trường Đại học Sư phạm Huế đã tận tình giảng dạy và truyền đạt những kiến thức bổ ích trong suốt khóa học.

Tôi cũng xin gửi lời cảm ơn đến các Anh, Chị học viên Cao học khóa 22, đặc biệt là các Anh, Chị chuyên ngành Đại số và lý thuyết số cùng tất cả bạn bè tôi đã luôn hỗ trợ tôi trong suốt khóa học.

Cuối cùng, xin được nói lời cảm ơn đến toàn thể gia đình tôi - những người đã luôn hỗ trợ, động viên tôi trong trong suốt khóa học và cũng là động lực giúp tôi hoàn thành Luận văn.

Mặc dù đã có nhiều cố gắng, tuy nhiên Luận văn chắc hẳn vẫn còn nhiều thiếu sót; Kính mong nhận được những góp ý từ quý Thầy giáo, Cô giáo cũng như các bạn học viên để Luận văn được hoàn thiện hơn.

Dương Bá Đạt

MỤC LỤC

Trang phụ bìa i

Lời cam đoan ii

Lời cảm ơn iii

Mục lục 1

Lời mở đầu 2

Chương 1. Một số kiến thức cơ sở 6

1.1. Phần tử lũy đẳng 6

1.2. Vành tích 6

1.3. Vành không phân tích được 8

1.4. Vành iđêan chính đặc biệt 9

1.5. ZPI-vành 9

1.6. Miền nguyên Dedekind 9

1.7. Vành các chuỗi lũy thừa hình thức 10

1.8. Vành địa phương 10

1.9. Địa phương hóa 11

1.10. SPAP-vành 12

1.11. Vành π-chính quy 13

1.12. Vành chính quy Von Neumann 13

1.13. Các khái niệm mở rộng của iđêan nguyên tố 13

Chương 2. Sự suy rộng của iđêan nguyên tố 16

2.1. Iđêan $(n-1,n)-\phi$-nguyên tố 16

2.2. Iđêan $(n-1,n)-n$-nguyên tố hầu khắp 29

Kết luận 48

Tài liệu tham khảo 49

LỜI MỞ ĐẦU

Trong luận văn này, chúng ta luôn giả thiết R là vành giao hoán có đơn vị ($1_R \neq 0_R$). Iđêan nguyên tố là một khái niệm quan trọng trong lĩnh vực Đại số giao hoán và luận văn này sẽ trình bày về sự mở rộng của iđêan nguyên tố.

Cho P là iđêan thực sự của R, lúc đó P gọi là iđêan nguyên tố nếu thỏa điều kiện:

$$ab \in P \Rightarrow a \in P \text{ hoặc } b \in P$$

trong đó $a, b \in R$.

Anderson và Smith [4] đã đưa ra khái niệm iđêan nguyên tố yếu như sau:

Cho P là iđêan thực sự của R, lúc đó P gọi là iđêan nguyên tố yếu nếu thỏa điều kiện:

$$0 \neq ab \in P \Rightarrow a \in P \text{ hoặc } b \in P$$

trong đó $a, b \in R$.

Ngoài ra, Bhatwadekar và Sharma [7] đưa ra khái niệm iđêan nguyên tố hầu khắp:

Cho P là iđêan thực sự của R, lúc đó P gọi là iđêan nguyên tố hầu khắp nếu thỏa điều kiện:

$$ab \in P \setminus P^2 \Rightarrow a \in P \text{ hoặc } b \in P$$

trong đó $a, b \in R$.

Rõ ràng một iđêan nguyên tố là một iđêan nguyên tố yếu, một iđêan nguyên tố yếu là một iđêan nguyên tố hầu khắp.

Anderson và Bataineh [3] đã mở rộng các khái niệm trên thành một khái niệm rộng hơn, đó là iđêan ϕ-nguyên tố.

Trước tiên, ta ký hiệu $S(R)$ là tập tất cả các iđêan của R và $Max(R)$ là tập tất cả các iđêan cực đại của R. Cho ánh xạ

$$\phi : S(R) \longrightarrow S(R) \cup \{\emptyset\}.$$

Lúc đó, một iđêan thực sự P của R được gọi là iđêan ϕ-nguyên tố nếu thỏa mãn điều kiện:

$$ab \in P \setminus \phi(P) \Rightarrow a \in P \text{ hoặc } b \in P$$

trong đó $a, b \in R$.

Cho ánh xạ

$$\phi_\alpha : S(R) \longrightarrow S(R) \cup \{\emptyset\}.$$

Lúc đó, ta có tương ứng [3]:

$\phi_\emptyset$	$\phi(P) = \emptyset$	iđêan nguyên tố.
ϕ_0	$\phi(P) = 0$	iđêan nguyên tố yếu.
ϕ_1	$\phi(P) = P$	iđêan tùy ý.
ϕ_2	$\phi(P) = P^2$	iđêan nguyên tố hầu khắp.
ϕ_n	$\phi(P) = P^n$	iđêan n-nguyên tố hầu khắp $(n \geq 2)$.
ϕ_ω	$\phi(P) = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} P^n$	iđêan ω-nguyên tố.

Cho hai ánh xạ

$$\psi_1, \psi_2 : S(R) \longrightarrow S(R) \cup \{\emptyset\}.$$

Anderson và Bataineh [3] đưa ra quan hệ như sau: $\psi_1 \leq \psi_2$ nếu $\psi_1(P) \subseteq \psi_2(P), \forall P \in S(R)$.

Với quan hệ được định nghĩa như trên, ta có khẳng định sau [3]:

$$\phi_\emptyset \leq \phi_0 \leq \phi_\omega \leq \cdots \leq \phi_{n+1} \leq \phi_n \leq \cdots \leq \phi_2 \leq \phi_1.$$

Badawi [5] cũng đưa ra một khái niệm khác, đó là iđêan 2-hấp thụ (2-absorbing):

Cho P là một iđêan thực sự của R, lúc đó P gọi là iđêan 2-hấp thụ nếu thỏa điều kiện:

$$a_1a_2a_3 \in P \Rightarrow a_1a_2 \in P \text{ hoặc } a_1a_3 \in P \text{ hoặc } a_2a_3 \in P$$

trong đó $a_1, a_2, a_3 \in R$.

Sau đó khái niệm trên được mở rộng bởi Anderson và Badawi [2], khái niệm iđêan n-hấp thụ (n-absorbing) được định nghĩa như sau:

Cho P là một iđêan thực sự của R, lúc đó P gọi là iđêan n-hấp thụ nếu thỏa điều kiện:

$$a_1a_2\cdots a_{n+1} \in P \Rightarrow \exists i \in \{1, 2, \ldots, n+1\} : a_1a_2\cdots a_{i-1}a_{i+1}\cdots a_{n+1} \in P$$

trong đó $a_1, a_2, \ldots, a_{n+1} \in R$.

Trong bài báo [8], khi xét $n \geq 2$ thì một iđêan $(n-1)$-hấp thụ P được gọi là iđêan $(n-1, n)$-nguyên tố. Như vậy, iđêan nguyên tố chính là iđêan $(1, 2)$-nguyên tố.

Nhắc lại rằng, khái niệm iđêan ϕ-nguyên tố được Anderson và Bataineh đưa ra trong [3] là mở rộng của khái niệm iđêan nguyên tố. Ebrahimpour và Nekooei [8] đã đưa ra khái niệm iđêan $(n-1, n) - \phi$-nguyên tố như sau:

Cho P là một iđêan thực sự của R, lúc đó P gọi là iđêan $(n-1, n) - \phi$-nguyên tố nếu thỏa điều kiện:

$$a_1a_2\cdots a_n \in P \setminus \phi(P) \Rightarrow \exists i \in \{1, 2, \ldots, n\} : a_1a_2\cdots a_{i-1}a_{i+1}\cdots a_n \in P$$

trong đó $a_1, a_2, \ldots, a_n \in R$.

Như vậy, iđêan nguyên tố là iđêan $(1, 2) - \phi_\emptyset$-nguyên tố, iđêan $(n-1, n)$-nguyên tố là iđêan $(n-1, n) - \phi_\emptyset$-nguyên tố, iđêan $(n-1, n)$-nguyên tố hầu khắp là iđêan $(n-1, n) - \phi_2$-nguyên tố,...

Nội dung của luận văn nhằm nghiên cứu một số tính chất cơ bản của các iđêan $(n-1, n) - \phi$-nguyên tố và tổng quan một số kết quả liên quan.

Vì lí do trên, tôi chọn đề tài "Sự suy rộng của iđêan nguyên tố" nhằm mang lại cho người đọc cái nhìn rộng hơn về iđêan nguyên tố.

Luận văn bao gồm 2 chương:

Chương 1: Một số kiến thức cơ sở.

Chương này sẽ trình bày về những kiến thức cơ sở được sử dụng trong luận văn, bao gồm những kiến thức được sử dụng nhiều trong các phần chứng minh như phần tử lũy đẳng, địa phương hóa,... Ngoài ra, còn có những khái niệm xuất hiện nhiều trong các kết quả mà luận văn trình bày như là vành địa phương, vành π-chính quy, vành chính quy Von Neumann,... Bên cạnh đó, không thể không nhắc tới khái niệm iđêan $(n-1,n)-\phi$-nguyên tố.

Chương 2: Sự suy rộng của iđêan nguyên tố.

Chương này là trọng tâm của luận văn, nội dung của chương này xoay quanh hai vấn đề chính.

Thứ nhất, đó là nêu lên một số tính chất của iđêan $(n-1,n)-\phi$-nguyên tố nói chung, ta biết rằng một iđêan $(n-1,n)$-nguyên tố cũng là một iđêan $(n-1,n)$-nguyên tố yếu và do đó cũng một iđêan $(n-1,n)-\omega$-nguyên tố. Tuy nhiên, một iđêan $(n-1,n)-\omega$-nguyên tố chưa hẳn đã là một iđêan $(n-1,n)$-nguyên tố yếu, một iđêan $(n-1,n)$-nguyên tố yếu cũng không nhất thiết là một iđêan $(n-1,n)$-nguyên tố. Vậy khi nào thì một iđêan $(n-1,n)-\omega$-nguyên tố là iđêan $(n-1,n)$-nguyên tố yếu? Khi nào thì một iđêan $(n-1,n)$-nguyên tố yếu là một iđêan $(n-1,n)$-nguyên tố? Các vấn đề đó sẽ được giải quyết ở Định lý 2.1.1, Hệ quả 2.1.2, Hệ quả 2.1.8.

Thứ hai, dựa trên những tính chất có được về iđêan $(n-1,n)-\phi$-nguyên tố, song song với việc xét các tính chất của iđêan $(n-1,n)-n$-nguyên tố hầu khắp thì ta cũng sẽ xét tính chất của những vành mà mọi iđêan thực sự đều là iđêan $(n-1,n)-n$-nguyên tố hầu khắp. Những tính chất đó được thể hiện ở Định lý 2.2.3, Định lý 2.2.7, Định lý 2.2.8, Định lý 2.2.11. Bằng việc mở rộng khái niệm SPAP-vành thì một khái niệm mới cũng được trình bày ở chương này, đó là khái niệm n-SPAP-vành. Một số tính chất của n-SPAP-vành được trình bày ở Hệ quả 2.2.20, Định lý 2.2.21, Hệ quả 2.2.22.