BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
ĐẠI HỌC HUẾ
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

NGUYỄN HUY HOÀNG

CHỈ SỐ CHÍNH QUY CỦA MÔĐUN PHÂN BẬC LIÊN KẾT VÀ CHỈ SỐ HILBERT

Chuyên ngành: **ĐẠI SỐ - LÝ THUYẾT SỐ**

Mã số : **60 46 01 04**

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

GIÁO VIÊN HƯỚNG DẪN KHOA HỌC

TS. CAO HUY LINH

HUẾ, năm 2014

LỜI CAM ĐOAN

Tôi xin cam đoan đây là công trình nghiên cứu của tôi. Các kết quả của các tác giả khác đã được sự đồng ý của tác giả khi đưa vào luận văn. Các kết quả nêu trong luận văn là trung thực và chưa từng được ai công bố trong bất kì một công trình nào khác.

Nguyễn Huy Hoàng

LỜI CẢM ƠN

Luận văn được hoàn thành dưới sự hướng dẫn của thầy giáo TS. Cao Huy Linh. Tôi xin gửi lời cám ơn chân thành và sâu sắc nhất đến thầy, mong thầy cùng gia đình luôn dồi dào sức khỏe, gặp nhiều may mắn và thành công.

Tôi xin gửi lời cảm ơn đến Ban Giám Hiệu, Khoa Toán, Phòng đào tạo Sau Đại Học Trường ĐHSP - Đại Học Huế và quý thầy cô giảng dạy khóa K21 đã giúp đỡ và tạo mọi điều kiện để tôi hoàn thành luận văn này.

Tôi cũng xin gửi lời cảm ơn đến tập thể lớp cao học Toán K21, đặc biệt là nhóm Hình học - Đại số đã cùng tôi học hỏi, chia sẻ, trao đổi kiến thức trong quá trình học tập.

Cuối cùng tôi xin gửi lời cảm ơn đến gia đình và người thân của mình.

Nguyễn Huy Hoàng

Mục lục

Trang phụ bìa **i**

Lời cam đoan **ii**

Lời cảm ơn **iii**

Mục lục **1**

MỞ ĐẦU **2**

1 Chỉ số chính quy Castelnouvo-Mumford của vành phân bậc. **4**

1.1 Iđêan nguyên tố và chiều Krull 4

1.2 Vành các thương và địa phương hóa 7

1.3 Iđêan $\mathfrak{m}$-nguyên sơ và iđêan tham số 9

1.4 Độ sâu và môđun Cohen-Macaulay 12

1.5 Vành và môđun phân bậc 14

1.6 Vành và môđun phân bậc liên kết 15

1.7 Đối đồng điều địa phương 17

1.8 Chỉ số chính quy Castelnuovo-Mumford 18

2 Chỉ số chính quy của vành phân bậc liên kết và chỉ số Hilbert **20**

2.1 Hàm Hilbert Samuel và chỉ số Hilbert 20

2.2 Chỉ số chính quy của môđun phân bậc liên kết 22

2.3 Mối liên hệ giữa chỉ số chính quy và chỉ số Hilbert của iđêan tham số 25

Kết luận **29**

Tài liệu tham khảo **30**

MỞ ĐẦU

Cho E là môđun phân bậc hữu hạn sinh trên một đại số phân bậc chuẩn R, tức là $R = \bigoplus_{n\geq 0} R_n = R_0[R_1]$. Lúc đó, chỉ số chính quy Castelnouvo-Mumford $\operatorname{reg}(E)$ của E được định nghĩa là số m nhỏ nhất sao cho $H^i_{R_+}(E)_n = 0$ với mọi $n \geq m - i + 1$ và $i \geq 0$, trong đó $H^i_{R_+}(E)$ là đối đồng điều địa phương của E với giá $R_+ = \oplus_{i>0} R_i$. Để gọn hơn ta thường nói chỉ số chính quy thay cho chỉ số chính quy Castelnouvo-Mumford.

Nếu R_0 là vành Artin thì $\ell(E_n) < +\infty$. Khi đó, ta định nghĩa hàm $h : \mathbb{Z} \mapsto \mathbb{N}$ với, $h(n) = \ell(E_n)$ được gọi là hàm Hilbert. Hilbert đã chứng mình được rằng tồn tại đa thức $p_M \in \mathbb{Q}[x]$ sao cho $h_M(n) = p_M(n)$ khi n đủ lớn, đa thức này được gọi là đa thức Hilbert. Lúc này, chỉ số Hilbert được định nghĩa là số n nhỏ nhất sao cho từ vị trí kế tiếp trở đi hàm Hilbert và đa thức Hilbert bằng nhau, ký hiệu $p(E)$.

Cho $(A, \mathfrak{m})$ là vành địa phương, I là iđêan $\mathfrak{m}$-nguyên sơ và M là A-môđun hữu hạn sinh. Kí hiệu

$$G_I(M) = \oplus_{n\geq 0} I^n M / I^{n+1} M.$$

Người ta gọi $G_I(M)$ là môđun phân bậc liên kết của M ứng với I. Đặc biệt, $G_I(A)$ là vành phân bậc chuẩn và được gọi là vành phân bậc liên kết của A ứng với I. $G_I(M)$ là $G_I(A)$-môđun phân bậc hữu hạn sinh.

Mục đích chính của luận văn là nghiên cứu mối quan hệ giữa chỉ số chính quy của $G_I(M)$ và chỉ số Hilbert $p(G_I(M))$. Việc nghiên cứu mối quan hệ này sẽ giúp chúng ta biết nhiều thông tin quan trọng về cấu trúc của M.

Việc nghiên cứu chỉ số chính quy đã thu hút nhiều nhà toán học trong và ngoài nước quan tâm. Năm 2003, Rossi-Trung-Valla [9] đã thiết lập chặn trên cho chỉ số chính quy của vành phân bậc liên kết ứng với iđêan cực đại của bậc mở rộng. Sau đó, Linh [4] (2005) đã mở rộng thành công kết quả này cho lớp iđêan $\mathfrak{m}$-nguyên sơ. Năm 2006, Linh-Trung [5] đã thiết lập chặn phổ dụng cho chỉ số chính quy của vành Cohen-Macaulay suy rộng ứng với iđêan tham số. Năm 2007, Linh [6] đã đưa ra một chặn trên cho chỉ số chính quy của vành phân bậc liên kết ứng với iđêan $\mathfrak{m}$-nguyên sơ theo bậc lũy linh. Gần đây, Brodmann-Linh [2] đã thiết lập mối quan hệ cho chỉ số chính quy, chỉ số Hilbert của vành phân bậc liên kết ứng với iđêan tham số.

Định lý 2.3.1. *Cho* $(A, \mathfrak{m})$ *là một vành Noether địa phương với số chiều* $d \geq 2$, I *là một iđêan tham số của* A. *Nếu* $\operatorname{depth}(A) = d - 1$ *và* $d - 2 \leq \operatorname{depth}(G_I(A)) \leq d - 1$ *thì:*

$$\operatorname{reg}(G_I(A)) = p(G_I(A)) + d - 1.$$

Vấn đề đặt ra là nếu mở rộng vành A thành môđun M bất kì thì công thức trên còn đúng hay không? Xuất phát từ những lý do trên, chúng tôi chọn đề tài: "*Chỉ số chính quy của môđun phân bậc liên kết ứng với iđêan tham số và chỉ số Hilbert*" để làm luận văn cao học của mình.

Kết quả chính mà chúng tôi thu được tương tự như công thức của Brodmann-Linh [2].

Định lý 2.3.4. *Cho* $(A, \mathfrak{m})$ *là một vành Noether địa phương,* M *là một* A*-môđun hữu hạn sinh với số chiều* $d \geq 2$, I *là một iđêan tham số của* M. *Nếu* $\operatorname{depth}(M) = d - 1$ *và* $d - 2 \leq \operatorname{depth}(G_I(M)) \leq d - 1$ *thì*

$$\operatorname{reg}(G_I(M)) = p(G_I(M)) + d - 1.$$

Phương pháp mà chúng tôi sử dụng hoàn toàn tương tự như của Brodmann-Linh.

Luận văn chia làm hai chương. Trong Chương 1, chúng tôi trình bày một số kiến thức cơ bản để hỗ trợ cho chương sau. Chương thứ hai bao gồm các kết quả chính của luận văn, chương này gồm có ba mục. Trong Mục 2.1, chúng tôi giới thiệu hàm Hilbert-Samuel, chỉ số Hilbert và số mũ rút gọn. Trong Mục 2.2, chúng tôi trình bày các tính chất quan trọng của phần tử $G_I(M)$-lọc chính quy (Bổ đề 2.2.3, 2.2.4, 2.2.5). Mục cuối cùng 2.3, chúng tôi tập trung chứng minh kết quả chính về mối quan hệ giữa chỉ số chính quy của môđun phân bậc liên kết và chỉ số Hilbert (Bổ đề 2.3.2, Mệnh đề 2.3.3 và Định lý 2.3.4).