

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
ĐẠI HỌC HUẾ
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

HỒ THỊ NGỌC

**KHÔNG GIAN $L^p(x)$
VÀ MỘT SỐ ỨNG DỤNG**

Demo Version - Select.Pdf SDK

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Chuyên ngành : TOÁN GIẢI TÍCH

Mã số : 60 46 01 02

Cán bộ hướng dẫn khoa học:

PGS.TS LÊ VĂN HẠP

HUẾ, 2014

LỜI CAM ĐOAN

Tôi xin cam đoan đây là công trình nghiên cứu của riêng tôi, các số liệu và kết quả nào trong luận văn là trung thực, được các đồng tác giả cho phép sử dụng và chưa từng được công bố trong bất kỳ một công trình nào khác.

Hồ Thị Ngọc

Demo Version - Select.Pdf SDK

LỜI CẢM ƠN

Luận văn này được hoàn thành dưới sự hướng dẫn khoa học tận tình, chu đáo của Thầy giáo, PGS.TS Lê Văn Hạp. Tôi xin gửi đến Thầy sự trân trọng và biết ơn sâu sắc.

Xin được bày tỏ lòng biết ơn và kính trọng đến quý Thầy Cô giáo Trường DHSP Huế, ĐHKH Huế, những người đã tận tình giảng dạy và luôn động viên, khích lệ tôi trong suốt hai năm học qua.

Tôi cũng xin chân thành cảm ơn BGH trường DHSP Huế, các Thầy Cô Khoa Toán trường DHSP Huế, ĐHKH Huế và PQLSDH trường DHSP Huế, những người đã giúp tôi có được kiến thức khoa học cũng như những điều kiện để hoàn thành công việc học tập, nghiên cứu của mình.

Cuối cùng tôi xin chân thành cảm ơn.

Demo Version - Select.Pdf SDK

Mục lục

| | |
|---|-----------|
| Trang phụ bìa | i |
| Lời cam đoan | ii |
| Lời cảm ơn | iii |
| Mục lục | 1 |
| Lời nói đầu | 2 |
| 1 Kiến thức chuẩn bị | 4 |
| 1.1 Không gian nửa môđun | 4 |
| 1.1.1 Tính chất cơ bản | 6 |
| 1.1.2 Sự hội tụ trong X_ρ | 9 |
| 1.1.3 Môđun liên hợp và không gian nửa môđun đối ngẫu | 11 |
| 1.2 Không gian Musielak-Orlicz | 14 |
| Demo Version - Select.Pdf SDK | |
| 2 Không gian $L^{p(x)}$ | 16 |
| 2.1 Tính chất cơ bản | 18 |
| 2.2 Bất đẳng thức Holder và phép nhúng | 22 |
| 2.2.1 Bất đẳng thức Holder cho $L^{p(x)}$ | 23 |
| 2.2.2 Phép nhúng | 25 |
| 2.3 Chuẩn liên hợp | 30 |
| 2.4 Hội tụ trong $L^{p(x)}$ | 34 |
| 2.5 Tính trừ mật của $L^{p(x)}$ | 38 |
| 3 Một số ứng dụng | 40 |
| 3.1 Bài toán Dirichlet | 41 |
| 3.2 Bài toán Neumann | 46 |
| Kết luận | 56 |
| Tài liệu tham khảo | 57 |

LỜI NÓI ĐẦU

Không gian $L^{p(x)}$ xuất hiện trong các tài liệu lần đầu tiên vào năm 1931 trong bài báo của Orlicz. Tuy nhiên, sau bài báo này Orlicz từ bỏ nghiên cứu về không gian này và tập trung vào nghiên cứu lý thuyết không gian hàm tổng quát hơn mà bây giờ mang tên ông - Không gian Orlicz. Nhưng trong những năm gần đây, việc nghiên cứu về không gian này phát triển mạnh, nhiều kết quả trước đây phần lớn được thay thế bởi nhiều kết quả gần đây. Không gian $L^{p(x)}$ khác với không gian L^p ở chỗ mũ p không phải là một hằng số mà là một hàm từ Ω đến $[1, \infty]$. Không gian này có một lớp không gian tổng quát hơn đó là không gian Musielak- Orlicz và không gian nửa modul. Vì vậy nó thừa hưởng một số tính chất mà không yêu cầu về tính đều của số mũ và có thể áp dụng các kết quả của không gian Musielak- Orlicz chung cho $p(x)$. Gần đây, khi khảo sát tính bị chặn của toán tử cực đại trên $L^{p(x)}(\Omega)$ với Ω là miền bị chặn, Diening đã đưa ra điều kiện log-Holder liên tục. Sau đó, điều kiện được mở rộng trên $L^{p(x)}(\mathbb{R}^n)$ nếu số mũ là hằng bên ngoài một tập compact. Trường hợp miền xác định không bị chặn bất kỳ cũng đã sớm được cải thiện bởi Cruz - Uribe, Fiorenza và Neugebauer. Sự quan tâm về không gian này càng được thúc đẩy bởi các mô hình trong vật lý cho chất lỏng electrorheological có độ nhớt thay đổi, điều này được mô hình hóa thông qua sự phụ thuộc của độ nhớt trên số mũ biến $p(x)$. Năm 2006, Y.M. Chen, S. Levine và M. Rao đã đề xuất hướng nghiên cứu cho việc phục hồi hình ảnh dựa trên số mũ biến Laplacian. Đây là điểm khởi đầu cho các nghiên cứu mới về mối liên hệ giữa PDE với số mũ biến và sử lý hình ảnh.

Trong luận văn này, chúng tôi tìm hiểu về không gian $L^{p(x)}$ và một số ứng dụng của của số mũ biến $p(x)$ vào PDE. Nội dung của luận văn được chia làm ba chương. **Demo Version - Select.Pdf SDK**

Chương 1 giới thiệu một số khái niệm cơ bản để đưa đến khái niệm không gian $L^{p(x)}$. Trong đó, chúng tôi trình bày không gian nửa modul và các tính chất quan trọng của không gian này, các loại hội tụ và mối quan hệ giữa chúng. Ngoài ra modul liên hợp và không gian modul đối ngẫu cũng được đưa vào. Cuối Chương 1, chúng tôi còn giới thiệu một không gian cụ thể hơn là không gian Musielak- Orlicz mà trên đó modul được xác định bởi tích phân của hàm nhận giá trị thực.

Chương 2 dành cho việc giới thiệu tổng quan về không gian $L^{p(x)}$, đây cũng chính là nội dung chính của luận văn. Trong chương này chúng tôi chia nhỏ thành nhiều phần và trên đó đưa ra một số tính chất và định lý quan trọng bao gồm: tính chất cơ sở, bất đẳng thức và phép nhúng, chuẩn liên hợp, sự hội tụ và tính chất trừ mật trong không gian này. Một số định lý quan trọng cũng được đề cập ở cuối chương như là kết quả được sử dụng về sau.

Khảo sát các bài toán Dirichlet, bài toán Neumann với $p(x)$ -Laplacian là nội dung của Chương 3. Phần đầu của chương này trình bày về tính xấp xỉ hữu hạn phần tử của $p(x)$ -Laplacian trong bài toán $-div((\kappa + |\nabla v|)^{p(x)-2} \nabla v) = f$ với $p \in \mathcal{P}^{log}$. Một số tài liệu trước đây đã chứng minh sự hội tụ mạnh của gradien nhưng không có bất kỳ tỉ lệ rõ ràng nào, để lấy được tỉ lệ hội tụ là mục đích chính của phần này. Phần còn lại trình bày vấn đề tồn tại và duy nhất nghiệm của bài toán Neumann không thuần nhất với $p(x)$ -Laplacian và $p = \infty$ trong miền con bằng cách xét một dãy thích hợp p_k bị chặn để $p_k \rightarrow p$ và thay thế p

bởi p_k trong bài toán gốc. Phần này khép lại bởi một định lí quan trọng về vấn đề tồn tại nghiệm viscosity của bài toán như là phát sinh tự nhiên từ Bổ đề 3.3, Mệnh đề 3.7 và phép chuyển qua giới hạn.

Mặc dù bản thân đã hết sức cố gắng nhưng trong việc trình bày luận văn không thể tránh khỏi những sai sót. Tác giả rất mong nhận được những ý kiến đóng góp để luận văn hoàn thiện hơn.

Huế, ngày 15 tháng 9 năm 2014

Hồ Thị Ngọc

Demo Version - Select.Pdf SDK