ĐẠI HỌC HUẾ
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

LÊ HOÀNG MAI

VỀ CĂN JACOBSON, J_S-CĂN VÀ CÁC LỚP CĂN CỦA NỬA VÀNH

LUẬN ÁN TIẾN SĨ TOÁN HỌC

Chuyên ngành: Đại số và lý thuyết số
Mã số: 62 46 01 04

Người hướng dẫn khoa học: **PGS.TSKH. Nguyễn Xuân Tuyến**

HUẾ - NĂM 2016

LỜI CAM ĐOAN

Luận án được hoàn thành tại Trường Đại học Sư phạm-Đại học Huế, dưới sự hướng dẫn của PGS.TSKH. Nguyễn Xuân Tuyến. Tôi xin cam đoan đây là công trình nghiên cứu của tôi. Các kết quả trong luận án là trung thực, được các đồng tác giả cho phép sử dụng và chưa từng được công bố trước đó.

Tác giả

Lê Hoàng Mai

LỜI CÁM ƠN

Luận án được hoàn thành dưới sự hướng dẫn tận tình và đầy trách nhiệm của PGS.TSKH. Nguyễn Xuân Tuyến. Tác giả xin được bày tỏ lòng tri ân sâu sắc tới Thầy, người đã đặt bài toán, hướng dẫn, giúp đỡ tận tình, chu đáo trong suốt quá trình tác giả học tập và thực hiện luận án.

Tác giả xin gửi lời cảm ơn tới TS. Trần Giang Nam (Viện Toán học, Viện Hàn lâm Khoa học và Công nghệ Việt Nam) vì sự giúp đỡ về tài liệu nghiên cứu và thảo luận những bài toán có liên quan đến luận án.

Tác giả xin được gửi lời cảm ơn tới:

- Khoa Toán học, Phòng Sau đại học, Trường Đại học Sư phạm-Đại học Huế,

- Khoa Sư phạm Toán - Tin, Trường Đại học Đồng Tháp,

về sự hỗ trợ và tạo mọi điều kiện thuận lợi để tác giả hoàn thành nhiệm vụ của một nghiên cứu sinh.

Cuối cùng, tác giả xin bày tỏ lòng biết ơn tới gia đình, đồng nghiệp và những người bạn thân thiết đã luôn giúp đỡ và động viên tác giả trong suốt quá trình học tập.

Lê Hoàng Mai

MỤC LỤC

MỘT SỐ KÝ HIỆU THƯỜNG DÙNG TRONG LUẬN ÁN

Kí hiệu	Ý nghĩa
$\mathbb{N}$	Nửa vành tất cả các số tự nhiên
$\mathbb{Q}^+$	Nửa vành tất cả các số hữu tỷ không âm
$\mathbb{R}^+$	Nửa vành tất cả các số thực không âm
$M_n(R)$	Nửa vành các ma trận vuông cấp n trên nửa vành R
$R[x]$	Nửa vành đa thức ẩn x với hệ tử trên nửa vành R
$\mathbf{B}$	Nửa trường Boolean
$\mathrm{End}(M)$	Nửa vành các tự đồng cấu của vị nhóm giao hoán $(M,+)$
$\mathrm{Ker}(f)$	Nhân của đồng cấu f
$\mathrm{Im}(f)$	Ảnh của đồng cấu f
$f(R)$	Ảnh thật sự của đồng cấu nửa vành $f : R \to S$
$\prod\limits_{i\in I} R_i$	Tích trực tiếp của một họ các nửa vành $(R_i)_{i\in I}$
$\overset{sub}{\prod\limits_{i\in I}} R_i$	Tích trực tiếp con của một họ các nửa vành $(R_i)_{i\in I}$
(S)	Iđêan sinh bởi tập S
$J(R)$	Căn Jacobson (J-căn) của nửa vành R
$J_s(R)$	J_s-căn của nửa vành R
$\mathrm{Nil}(R)$	Căn Nil của nửa vành R
$\mathcal{I}(R)$	Tập tất cả các iđêan của nửa vành R
$\mathcal{K}(R)$	Tập tất cả các iđêan cô lập (k-iđêan) của nửa vành R
$(0 : M)_R$	Linh hóa tử của R-nửa môđun M trong nửa vành R
$\mathbb{H}$	Lớp tất cả các nửa vành
$\mathbb{U}$	Lớp phổ dụng của các nửa vành trong $\mathbb{H}$
$\mathbb{R}$	Lớp căn của các nửa vành trong $\mathbb{U}$
$\mathbb{S}$	Lớp nửa đơn của các nửa vành trong $\mathbb{U}$
$\mathfrak{L}\mathbb{A}$	Lớp căn dưới của một lớp $\mathbb{A}$ các nửa vành
$\mathcal{U}\mathbb{M}$	Lớp căn trên của một lớp chính quy $\mathbb{M}$ các nửa vành

ACC	Điều kiện dãy tăng
DCC	Điều kiện dãy giảm
$Z(R)$	Tập cộng hút của nửa vành R
$V(R)$	Vành con lớn nhất của nửa vành R
$\cong$	Đẳng cấu nửa vành, nửa môđun
$\simeq$	Nửa đẳng cấu nửa vành, nửa môđun
ρ	Quan hệ tương đẳng trên nửa vành, nửa môđun
r/ρ	lớp tương đương của phần tử r theo tương đẳng ρ
Cong(M)	Tập tất cả các quan hệ tương đẳng trên nửa môđun M
Sub(M)	Tập tất cả các nửa môđun con của nửa môđun M
M/ρ	Nửa môđun thương của nửa nửa môđun M theo tương đẳng ρ
M/N	Nửa môđun thương của nửa môđun M theo tương đẳng Bourne $\equiv_N$
$\square$	Kết thúc chứng minh, nhận xét và ví dụ

MỞ ĐẦU

1 Lý do chọn đề tài

Khái niệm căn được nghiên cứu lần đầu tiên bởi Cartan cho các đại số Lie hữu hạn chiều trên các trường đóng đại số. Căn của một đại số Lie hữu hạn chiều A là iđêan giải được lớn nhất của A và nó là tổng tất cả các iđêan giải được của A. Đại số Lie A được gọi là nửa đơn nếu căn của nó bằng 0. Cartan đã chỉ ra rằng đại số Lie nửa đơn là tổng trực tiếp của hữu hạn đại số Lie đơn. Hơn nữa, ông còn mô tả được các đại số Lie đơn hữu hạn chiều trên các trường đóng đại số. Do đó, cấu trúc của các đại số Lie nửa đơn hữu hạn chiều là hoàn toàn được xác định.

Wedderburn đã mở rộng kết quả nói trên cho các đại số kết hợp hữu hạn chiều trên các trường. Ông định nghĩa căn của một đại số A như vậy, kí hiệu $\mathrm{rad}(A)$, là iđêan lũy linh lớn nhất của A và nó cũng bằng tổng tất cả các iđêan lũy linh của A. Tương tự như Cartan, Wedderburn gọi một đại số hữu hạn chiều A là nửa đơn nếu $\mathrm{rad}(A) = 0$. Ông đã chứng minh được rằng đại số hữu hạn chiều A là nửa đơn nếu và chỉ nếu nó là tổng trực tiếp của hữu hạn các đại số đơn hữu hạn chiều A_i, trong đó mỗi A_i là một đại số ma trận trên một đại số chia được hữu hạn chiều.

Artin đã mở rộng định lý của Wedderburn cho các vành thỏa mãn điều kiện cực tiểu (gọi là vành Artin). Với các vành R như vậy, tổng của các iđêan lũy linh trong R là lũy linh, do đó R có một iđêan lũy linh lớn nhất $\mathrm{rad}(R)$, được gọi là căn Wedderburn của R. Như vậy, định lý của Wedderburn cho các đại số đơn và nửa đơn đã được mở rộng thành công cho các vành Artin một phía. Tuy nhiên, đối với vành không Artin một phía R, tổng của các iđêan lũy linh trong R không còn là lũy linh và như vậy, R không có iđêan lũy linh lớn nhất, do đó chúng ta không có khái niệm căn cho các vành bất kỳ.

Năm 1945, Jacobson [26] đề xuất khái niệm căn (được gọi là *căn Jacobson*) cho vành kết hợp bất kỳ là tổng của tất cả các iđêan phải tựa chính quy phải. Đặc biệt, khi R là vành Artin một phía thì khái niệm căn Jacobson và căn Wedderburn của R là trùng nhau. Kể từ đây, khái niệm căn Jacobson trở thành một trong những công cụ hữu dụng để nghiên cứu cấu trúc vành. Căn Jacobson của lý thuyết vành và các vấn đề liên quan đã được trình bày tương đối đầy đủ và có hệ thống trong các tài liệu như: Gardner-Wiegandt [11], Lam [37] và Anderson-Fuller [6].

Khái niệm nửa vành được giới thiệu bởi Vandiver [58] vào năm 1934, là tổng quát hóa khái niệm vành kết hợp theo nghĩa không đòi hỏi tính đối xứng của phép cộng. Trong thập niên 30 của thế kỷ 20, khái niệm nửa vành chưa được cộng đồng toán học quan tâm nhiều. Tầm quan trọng của nửa vành trong lý thuyết khoa học máy tính, đầu tiên được công nhận bởi Schützenberger [54]. Ngày nay, nửa vành được quan tâm nghiên cứu cả về phương diện lý thuyết lẫn ứng dụng. Các tính chất, ứng dụng của nửa vành và các vấn đề liên quan đã được trình bày trong các tài liệu như: Golan [13], Berstel-Reutenauer [8] và Polák [18].

Gần đây, nửa vành cộng lũy đẳng (còn được gọi là nửa vành lũy đẳng bởi một số tác giả) được các nhà toán học quan tâm như: Gathmann [12] và Izhakian-Rowen [24] vì nửa vành cộng lũy đẳng là đối tượng nghiên cứu chính của lý thuyết hình học miền nhiệt đới (tropical geometry) và lý thuyết đại số tuyến tính trên đại số miền nhiệt đới (tropical algebra).

Căn của nửa vành bắt đầu được quan tâm bởi một số nhà toán học từ thập niên 50 của thế kỷ 20. Đặc biệt, năm 1951 Bourne [9] đã giới thiệu khái niệm căn Jacobson (hay J-căn) của nửa vành theo iđêan nửa chính quy một phía. Ngoài ra, Bourne cũng đã chứng minh được mọi iđêan trái (phải) lũy linh của nửa vành chứa trong J-căn [9, Theorem 7] và tính được J-căn của nửa vành ma trận trên nửa vành có đơn vị [9, Theorem 9]. Năm 1958, Bounne và Zassenhaus [10] giới thiệu một lớp các iđêan đặc biêt của nửa vành mà nó được gọi là *iđêan cô lập* (hay *k-iđêan*) và chứng minh được J-căn của nửa vành là một iđêan cô lập.

Căn Jacobson của các nửa vành tiếp tục được nghiên cứu bởi Iizuka theo quan điểm lý thuyết biểu diễn. Trong [22], Iizuka đã sử dụng lớp các nửa môđun trái bất khả quy để đặc trưng J-căn của nửa vành [22, Theorem 8]. Ông cũng giới thiệu khái niệm iđêan nguyên thủy cô lập mạnh của nửa vành và đặc trưng J-căn là giao của tất cả các iđêan nguyên thủy cô lập mạnh [22, Theorem 6], và chỉ ra mối liên hệ giữa J-căn của nửa vành và căn Jacobson vành sai phân của nó [22, p. 420]. Ngoài ra, ông giới thiệu một lớp iđêan đặc biệt của nửa vành mà được gọi là *h-iđêan* và chứng minh J-căn của các nửa vành là một h-iđêan.

Trong [39], LaTorre đã chứng minh J-căn của nửa vành là k-iđêan (h-iđêan) phải sinh bởi tập tất cả các k-iđêan (h-iđêan) phải nửa chính quy phải [39, Theorem 3.1] và nếu R là một vành thì hai khái niệm căn Jacobson của vành và nửa vành là trùng nhau [39, Theorem 3.2]. Ngoài ra, ông thiết lập được một số tính chất quen thuộc liên quan đến căn Jacobson trong lý thuyết vành cho trường hợp nửa vành. Đặc biệt, LaTorre đã mô tả cấu trúc của nửa vành cộng chính quy J-nửa đơn [39, Theorem 3.4]. Tuy nhiên, các kết quả liên quan đến J-căn của nửa vành đến thời điểm này còn rất khiêm tốn so với các kết quả liên quan đến căn Jacobson trong lý thuyết vành.

Cùng với đó, khái niệm nửa môđun trái đơn trên nửa vành cũng được quan tâm nghiên cứu như: Izhakian-Rhodes-Steinberg [25] đã mô tả tất cả các lớp nửa môđun trái đơn trên một đại số nửa nhóm hữu hạn lũy đẳng $\mathbf{B}S$ (S là một nửa nhóm hữu hạn), Kendziorra-Zumbrägel [33] chỉ ra luôn tồn tại nửa môđun trái đơn trên lớp các nửa vành có đơn vị hữu hạn cộng lũy đẳng và Katsov-Nam-Zumbrägel [30] chỉ ra luôn tồn tại nửa môđun trái đơn trên lớp các nửa vành đầy đủ chỉ có tương đẳng tầm thường với $RR \neq 0$. Ngoài ra, chúng tôi chưa tìm thấy công trình nào chứng minh sự tồn tại nửa môđun trái đơn trên nửa vành bất kỳ.

Gần đây, Katsov-Nam đã nhận được một số kết quả liên quan đến J-căn đối với các nửa vành [27, Section 3 và 4], đặc biệt là các kết quả liên quan đến cấu trúc của các nửa vành thông qua J-căn như định lý của Hopkins đối với nửa vành Artin [27, Corollary 4.4] và định lý cấu trúc đối với nửa vành nguyên thủy [27, Theorem 4.5]. Tuy nhiên, một hạn chế của J-căn là các nửa vành cộng lũy đẳng thuộc về lớp căn cảm sinh của nó, tức là, nếu R là nửa vành cộng lũy đẳng thì $J(R) = R$ ([27, Example 3.7] hoặc [55, Mệnh đề 2.5]). Để khắc phục vấn đề này, Katsov-Nam giới thiệu khái niệm J_s-căn (một dạng tổng quát hóa căn Jacobson trong lý thuyết vành) của các nửa vành bằng cách sử dụng lớp các nửa môđun trái đơn [27, p. 5076] và nhận được định lý mô tả cấu trúc của nửa vành cộng lũy đẳng hữu hạn J_s-nửa đơn [27, Theorem 3.11]. Đồng thời, họ cũng chỉ ra rằng J-căn và J_s-căn là trùng nhau đối với lớp tất cả các vành nhưng trong trường hợp chung của nửa vành thì khác nhau, chẳng hạn lớp các nửa vành cộng lũy đẳng [27, Example 3.7], và chỉ ra mối quan hệ giữa chúng cho các nửa vành cộng chính quy và nửa vành giao hoán [27, Proposition 4.8]. Tuy nhiên, mối quan hệ giữa J-căn và J_s-căn của các nửa vành trong trường hợp tổng quát thì chưa biết. Để làm sáng tỏ điều này, một vấn đề tự nhiên được đặt ra là xét mối quan hệ giữa các căn này.

Bài toán [27, Problem 1] Mô tả lớp các nửa vành R sao cho $J_s(R) \subseteq J(R)$, trong trường hợp đặc biệt $J_s(R) = J(R)$.

Trong luận án này, chúng tôi tiếp tục sử dụng công cụ J-căn và J_s-căn để nghiên cứu cấu trúc một số lớp các nửa vành, thiết lập một số kết quả liên quan đến căn Jacobson trong lý thuyết vành cho trường hợp nửa vành, mô tả mối quan hệ giữa J-căn và J_s-căn đối với một số lớp các nửa vành, qua đó trả lời một phần Bài toán [27, Problem 1].

Ngoài ra, luận án này cũng quan tâm căn của nửa vành theo quan điểm Kurosh-Amitsur. Đầu thập niên 50 thế kỷ 20, Amitsur [2, 3, 4] và Kurosh [35] là những nhà toán học đầu tiên độc lập khám phá ra rằng tất cả các căn cổ điển có các tính chất chung nào đó và họ đã sử dụng các tính chất đại số này để tiên đề hóa định nghĩa lớp căn trừu tượng. Năm 1988, căn Kurosh-Amitsur cho một phạm trù đại số chung được đề xuất bởi Márki-Mlitz-Wiegandt [47]. Năm 2004, căn của vành theo quan điểm Kurosh-Amitsur và các kết quả liên quan đã được trình bày một cách có hệ thống bởi Gardner-Wiegandt [11]. Trong đó, ứng với mỗi lớp căn γ cho trước ta luôn xác định được một toán tử căn hay phép lấy căn (gọi là γ-căn hay căn Kurosh-Amitsur) và ngược lại với mỗi toán tử căn ρ cho trước ta luôn xác định được một lớp căn.

Năm 1983, Olson-Jenkins [50] đã tổng quát hóa khái niệm lớp căn trong lý thuyết vành cho trường hợp nửa vành và sau đó một số vấn đề liên quan đến lớp căn của các nửa vành được Olson và các cộng sự của ông trình bày trong một loạt các công trình [51, 52, 53]. Ngoài ra, căn Kurosh-Amitsur cho các phạm trù nửa trường được nghiên cứu bởi Weinert-Wiegandt [61, 62, 63], phạm trù nhóm được nghiên cứu bởi Krempa-Malinawska [34] và Li-Zhang [43].

Gần đây, căn Kurosh-Amitsur của các nửa vành tiếp tục được nghiên cứu. Trong [15, p. 652], Hebisch-Weinert đã xây dựng được các lớp căn từ các lớp đặc biệt và đặc biệt yếu. Morak [48] đã xây dựng ba trụ cột của căn Kurosh-Amitsur của nửa vành một cách độc lập đó là: Lớp căn, lớp nửa đơn và toán tử căn và Hebisch-Weinert [17, Theorem 3.6] đã chỉ ra được sự tương ứng 1-1 giữa ba trụ cột đó. Trong [16, Theorem 3.4], Hebisch-Weinert đã chứng minh được từ một lớp căn theo quan điểm lý thuyết vành luôn xây dựng được một lớp căn theo quan điểm lý thuyết nửa vành. Ngoài ra, Morak [48, Theorem 5.3] cũng xây dựng được một lớp căn từ một lớp chính quy các nửa vành cho trước được gọi là lớp căn trên.

Trong [11, p. 28], lớp căn dưới của một lớp δ các vành là giao tất cả các lớp căn chứa δ và nó là lớp căn nhỏ nhất chứa δ, kí hiệu $\mathfrak{L}\delta$. Có một vài phương pháp xây dựng lớp căn dưới của một lớp δ của các vành đó là phương pháp của Watters [60], phương pháp của Kurosh [35] và phương pháp của Lee [41]. Lớp căn dưới của một lớp các nửa vành thì được định nghĩa tương tự như trong lý thuyết vành và lớp căn dưới của một lớp $\mathbb{A}$ các nửa vành cũng được kí hiệu là $\mathfrak{L}\mathbb{A}$. Trong [65, Theorem 2.6], Zulfiqar đã xây dựng lớp căn dưới của một lớp các nửa vành theo phương pháp tương tự của Watters. Ngoài ra, Zulfiqar [64, 66] cũng đã tổng quát hóa khái niệm tổng của hai lớp căn và giao của một lớp căn với tổng của hai lớp căn trong lý thuyết vành được xây dựng bởi Lee-Propes [11] cho trường hợp nửa vành. Tính chất di truyền của lớp căn các vành thì được nghiên cứu bởi Anderson-Divinsky-Sulínski [5] và Morak [48, Section 6] đã tổng quát hóa các tính chất này cho trường hợp lớp căn của các nửa vành.

Tuy nhiên, những kết quả liên quan căn Kurosh-Amitsur của nửa vành cho đến thời điểm hiện tại còn khá khiêm tốn so với các kết quả tương ứng căn Kurosh-Amitsur trong lý thuyết vành.

Với các lý do trên, chúng tôi chọn đề tài **"Về căn Jacobson, J_s-căn và các lớp căn của nửa vành"** làm đề tài luận án. Đề tài tập trung nghiên cứu những vấn đề sau.

(1) Sử dụng công cụ J-căn và J_s-căn để nghiên cứu cấu trúc của một số lớp các nửa vành và thiết lập một vài kết quả liên quan đến căn Jacobson trong lý thuyết vành cho trường hợp nửa vành.

(2) Thiết lập mối quan hệ giữa J-căn và J_s-căn trên một số lớp các nửa vành (qua đó trả lời một phần Bài toán [27, Problem 1]). Mô tả một số lớp nửa vành mà nó là V-nửa vành trái (phải) J_s-nửa đơn (qua đó trả lời một phần Bài toán [1, Problem 1]).

(3) Nghiên cứu các vấn đề liên quan đến lớp căn các nửa vành như: Đề xuất khái niệm nửa vành con chấp nhận được và đặc trưng lớp căn theo khái niệm nửa vành con chấp nhận được và đồng cấu, xây dựng lớp căn từ một lớp cho trước các nửa vành và nghiên cứu tính di truyền của lớp căn các nửa vành.

2 Mục đích nghiên cứu

Mô tả cấu trúc các nửa vành J-nửa đơn hoặc J_s-nửa đơn và thiết lập một vài kết quả liên quan đến căn Jacobson trong lý thuyết vành cho trường hợp nửa vành. So sánh J_s-căn và căn Nil trên lớp các nửa vành có đơn vị giao hoán phi khả đối. Thiết lập điều kiện cần và đủ để J-căn và J_s-căn trùng nhau trên lớp các nửa vành nửa đơn, lớp các nửa vành cộng π-chính quy, lớp các nửa vành phản bị chặn và lớp các V-nửa vành trái. Mô tả một số lớp các nửa vành mà nó là V-nửa vành trái (phải) J_s-nửa đơn. Đặc trưng lớp căn của nửa vành theo khái niệm nửa vành con chấp nhận được, xây dựng lớp căn dưới của một lớp các nửa vành và thiết lập điều kiện cần và đủ để lớp căn trên của một lớp chính quy các nửa vành là di truyền.

3 Đối tượng và phạm vi nghiên cứu

3.1 Đối tượng nghiên cứu:

- J-căn, J_s-căn của nửa vành.
- Lớp căn của nửa vành.

3.2 Phạm vi nghiên cứu:

Đại số kết hợp. Lý thuyết nửa vành và nửa môđun.

4 Phương pháp nghiên cứu

- Phương pháp nghiên cứu toán lý thuyết và phương pháp đặc thù của lý thuyết nửa vành và nửa môđun.

- Sử dụng công cụ căn như: J-căn, J_s-căn và lớp căn để nghiên cứu cấu trúc các nửa vành và các vấn đề liên quan.

5 Ý nghĩa khoa học và thực tiễn

Mô tả cấu trúc nửa vành cộng π-chính quy J-nửa đơn. Chứng tỏ sự tồn tại nửa môđun trái đơn trên lớp các nửa vành có đơn vị, chứng minh J_s-căn trùng với căn Nil trên lớp các nửa vành có đơn vị giao hoán phi khả đối, thiết lập một kết quả tương tự của Snapper về căn Jacobson của vành đa thức trong lý thuyết vành cho trường hợp nửa vành có đơn vị giao hoán phi khả đối và cho một mô tả đầy đủ cấu trúc các nửa vành có đơn vị giao hoán phi khả đối J_s-nửa đơn. Trả lời một phần các Bài toán [27, Problem 1] và [1, Problem 1]. Đặc trưng lớp căn của các nửa vành theo nửa vành con chấp nhận được và đồng cấu. Xây dựng lớp căn dưới của một lớp các nửa vành, một lớp các nửa vành đóng đồng cấu. Thiết lập điều kiện cần và đủ để lớp căn trên của một lớp chính quy các nửa vành là di truyền. Chứng tỏ lớp căn trên của một lớp chính quy các nửa vành có đơn vị luôn di truyền.

6 Cấu trúc của luận án

Ngoài phần Mở đầu, Kết luận và Tài liệu tham khảo, luận án được chia làm ba chương.

Chương 1 của luận án, trình bày lại các khái niệm và một số tính chất liên quan đến nửa vành, nửa môđun. Các khái niệm và kết quả này là cần thiết cho các chứng minh trong hai chương chính của luận án. Trong Tiết 1.1, trình bày các khái niệm và giới thiệu các ví dụ minh họa về nửa vành, nửa vành con, iđêan, nửa môđun, nửa môđun con, nửa môđun Artin (Noether), nửa vành Artin (Noether),... Trong Tiết 1.2, trình bày khái niệm tương đẳng trên nửa vành và nửa môđun, đặc biệt là tương đẳng Bourne; khái niệm nửa vành thương và nửa môđun thương. Trong Tiết 1.3, trình bày khái niệm đồng cấu nửa vành và đồng cấu nửa môđun. Nội dung của chương này được viết dựa trên các tài liệu tham khảo [9], [13], [22] và [27].

Trong Chương 2, sử dụng J-căn và J_s-căn để nghiên cứu cấu trúc các nửa vành và các vấn đề liên quan. Trong Tiết 2.1, chúng tôi trình bày lại một số khái niệm và tính chất liên quan đến J-căn. Sau đó, dựa trên kết quả tổng quát của Katsov-Nam về nửa vành J-nửa đơn, luận án mô tả đầy đủ nửa vành cộng π-chính quy J-nửa đơn (Định lý 2.1.14). Kết quả này là một mở rộng kết quả của Latorre [39, Theorem 3.4]. Ngoài ra, chứng minh một kết quả tương tự của Hopkins về căn Jacobson lũy linh trong lý thuyết vành cho trường hợp nửa vành cộng giản ước (Định lý 2.1.18). Trong Tiết 2.2, trình bày lại một số khái niệm và tính chất liên quan đến nửa môđun trái đơn và J_s-căn của các nửa vành. Kendziorra-Zumbrägel [33] chỉ ra luôn tồn tại nửa môđun trái đơn trên lớp các nửa vành có đơn vị hữu hạn cộng lũy đẳng, chúng tôi chứng tỏ sự tồn tại nửa môđun trái đơn trên lớp các nửa vành có đơn vị (Định lý 2.2.5) và chứng minh J_s-căn trùng với căn Nil trên lớp các nửa vành có đơn vị giao hoán phi khả đối (Định lý 2.2.12). Từ kết quả này, chúng tôi nhận được một kết quả tương tự của Snapper về căn Jacobson của vành đa thức trong lý thuyết vành cho trường hợp nửa vành có đơn vị giao hoán phi khả đối (Hệ quả 2.2.15) và cho một mô tả đầy đủ cấu trúc các nửa vành có đơn vị giao hoán phi khả đối J_s-nửa đơn (Hệ quả 2.2.18). Trong Tiết 2.3, thiết lập điều kiện cần và đủ để J-căn và J_s-căn trùng nhau trên lớp các nửa vành nửa đơn (Định lý 2.3.4), trên lớp các nửa vành cộng π-chính quy (Mệnh đề 2.3.5 và Định lý 2.3.6), trên lớp các nửa vành phản bị chặn (Định lý 2.3.10 và Định lý 2.3.11) và trên lớp các V-nửa vành trái (Mệnh đề 2.3.14 và Định lý 2.3.15). Trong Tiết 2.4, cho một mô tả đầy đủ cấu trúc các nửa vành nửa đơn mà nó là V-nửa vành trái (phải) J_s-nửa đơn (Hệ quả 2.4.1); mô tả được lớp các nửa vành đơn với một phần tử vô hạn, lớp các nửa vành cô lập trái (phải) Artin trái (phải) chỉ có tương đẳng tầm thường và lớp các nửa vành cộng hút phản bị chặn là các V-nửa vành trái (phải) J_s-nửa đơn (Định lý 2.4.5 và Định lý 2.4.7). Nội dung của chương này được viết dựa trên các kết quả trong các bài báo [55], [44], [45] và [46].

Chương 3, dành cho việc nghiên cứu lớp căn (căn theo quan điểm Kurosh-Amitsur) các nửa vành. Trong Tiết 3.1, trình bày lại một số khái niệm và tính chất liên quan đến lớp căn, lớp nửa đơn và toán tử căn của các nửa vành. Sau đó, giới thiệu khái niệm nửa vành con chấp nhận được (Định nghĩa 3.1.15) và đặc trưng lớp căn các nửa vành theo nửa vành con chấp nhận được và đồng cấu (Định lý 3.1.17). Kết quả này là một mở rộng của Định lý 3.1.3 và là một kết quả tương tự của [11, Theorem 3.1.9] trong lý thuyết vành. Trong Tiết 3.2, sử dụng phương pháp xây dựng lớp căn từ một lớp các vành của Kurosh [11, Theorem 3.3.1], chúng tôi xây dựng lớp căn dưới từ một lớp các nửa vành cho trước (Định lý 3.2.2 và Định lý 3.2.3). Ngoài ra, chúng tôi cũng xây dựng lớp căn dưới từ một lớp đóng đồng cấu các nửa vành cho trước (Định lý 3.2.4 và Hệ quả 3.2.6) theo phương pháp của Lee [11, Theorem 3.3.2]. Trong Tiết 3.3, trình bày lại điều kiện cần và đủ để lớp căn các nửa vành là di truyền của Morak [48, Theorem 6.2 and 6.4]. Từ đó, chúng tôi nhận được các lớp căn $\mathbb{J}$ và $\mathbb{J}_s$ là di truyền (Hệ quả 3.3.2). Thiết lập điều kiện cần và đủ để lớp căn trên của một lớp chính quy các nửa vành là di truyền (Định lý 3.3.4) và chứng minh lớp căn trên của một lớp chính quy các nửa vành có đơn vị thì luôn di truyền (Định lý 3.3.5). Từ kết quả này, chúng tôi nhận được lớp căn Browm-McCoy của lớp phổ dụng $\mathbb{U}$ các nửa vành là di truyền (Hệ quả 3.3.6). Nội dung của chương này được viết dựa trên các kết quả trong các bài báo [56] và [23].

Chương 1
KIẾN THỨC CHUẨN BỊ VỀ NỬA VÀNH VÀ NỬA MÔĐUN

Trong chương này, sử dụng các tài liệu tham khảo [9], [13], [22] và [27] để giới thiệu lại một số khái niệm và tính chất liên quan đến nửa vành và nửa môđun. Điều này là cần thiết để trình bày các chương chính của luận án (Chương 2 và Chương 3). Nội dung chương này được chia làm bốn tiết, gồm: nửa vành và nửa môđun; quan hệ tương đẳng, nửa vành thương và nửa môđun thương; đồng cấu nửa vành và đồng cấu nửa môđun; kết luận Chương 1.

1.1 Nửa vành và nửa môđun

Tiết này chúng tôi trình bày lại một số khái niệm và giới thiệu các ví dụ liên quan nửa vành và nửa môđun như: Khái niệm nửa vành, nửa vành con, iđêan, nửa môđun, nửa môđun con,...

Định nghĩa 1.1.1. Một tập hợp R khác rỗng cùng với hai phép toán hai ngôi cộng "+" và nhân "·" trên R được gọi là một *nửa vành* nếu các điều kiện sau được thỏa mãn:

(1) $(R, +)$ là một vị nhóm giao hoán, với phần tử không kí hiệu là 0;

(2) $(R, \cdot)$ là một nửa nhóm;

(3) Phép nhân phân phối hai phía đối với phép cộng, tức là:

$$x(y+z) = xy + xz,$$
$$(y+z)x = yx + zx,$$

với mọi $x, y, z \in R$;

(4) $0x = x0 = 0$ với mọi $x \in R$.

Nếu nửa vành R mà trong đó $(R, .)$ là nửa nhóm giao hoán thì R được gọi là *nửa vành giao hoán*. Nếu nửa vành R mà trong đó $(R, .)$ là một vị nhóm với phần tử đơn vị khác phần tử không thì R được gọi là *nửa vành có đơn vị*, kí