

ĐẠI HỌC HUẾ
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

*****◇◇◇*****

ĐINH THỊ PHƯƠNG THẢO

BÀI TOÁN BIÊN DIRICHLET CHO
PHƯƠNG TRÌNH ELLIPTIC PHI
TUYẾN VỚI ĐIỀU KIỆN
LANDESMAN - LAZER

Demo Version - Select Pdf SDK
Chuyên ngành: TOÁN GIẢI TÍCH

Mã số: 60.46.01.02

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC
THEO ĐỊNH HƯỚNG NGHIÊN CỨU

Cán bộ hướng dẫn khoa học:

TS. NGUYỄN THÀNH CHUNG

Thừa Thiên Huế, Năm 2017

LỜI CAM ĐOAN

Tôi xin cam đoan, luận văn này là công trình nghiên cứu của tôi dưới sự hướng dẫn trực tiếp của thầy giáo TS. Nguyễn Thành Chung.

Trong quá trình nghiên cứu đề tài luận văn, tôi đã kế thừa thành quả khoa học của các nhà Toán học và các nhà Khoa học với sự trân trọng và biết ơn.

Tác giả

Demo Version - Select.Pdf SDK Đinh Thị Phương Thảo

LỜI CẢM ƠN

Trước hết tôi xin gửi lời cảm ơn đến Thầy giáo TS. Nguyễn Thành Chung, cảm ơn những lời động viên, nhắc nhở của Thầy trong suốt quá trình hướng dẫn khoa học cho tôi. Thầy đã giúp tôi vượt qua những khó khăn để hoàn thành nhiệm vụ học tập và nghiên cứu của mình.

Tôi xin được bày tỏ lòng biết ơn đến quý Thầy - Cô giáo đã giảng dạy lớp cao học Toán Khóa 24 của trường ĐHSP Huế cũng như toàn thể các thầy cô trong khoa Toán trường ĐHSP Huế vì sự giảng dạy tận tình và sự quan tâm, động viên, khích lệ tôi trong suốt quá trình học tập và thực hiện luận văn.

Tôi cũng xin gửi lời cảm ơn đến BGH trường ĐHSP Huế, Phòng Sau Đại học trường ĐHSP Huế đã tạo điều kiện để tôi hoàn thành công việc học tập, nghiên cứu của mình.

Mặc dù đã có nhiều cố gắng nhưng luận văn khó tránh khỏi những thiếu sót. Tác giả mong nhận được những ý kiến đóng góp của quý thầy, cô và bạn đọc để luận văn được hoàn thiện hơn.

Cuối cùng, tôi xin chia sẻ niềm vui lớn này với bạn bè, người thân và gia đình tôi, những người luôn sát cánh động viên giúp đỡ tôi hoàn thành luận văn này.

Xin trân trọng cảm ơn!

MỤC LỤC

Trang phụ bìa	i
Lời cam đoan	ii
Lời cảm ơn	iii
Mục lục	1
Mở đầu	2
Chương 1. Kiến thức bổ trợ	5
1.1 Không gian Sobolev $W_0^{1,p}(\Omega)$	5
1.2 Một số vấn đề cơ bản về phương pháp biến phân	10
Chương 2. Bài toán biên Dirichlet cho phương trình elliptic phi tuyến với điều kiện Landesman-Lazer	14
2.1 Giới thiệu bài toán	14
2.2 Trường hợp f là một hàm bị chặn	17
2.3 Trường hợp f là một hàm không bị chặn	31
Kết luận	52
Tài liệu tham khảo	53

MỞ ĐẦU

Như chúng ta đã biết, một số mô hình về các bài toán độc lập thời gian trong các ngành khoa học kỹ thuật khác nhau sẽ dẫn đến các bài toán biên elliptic trong phương trình đạo hàm riêng (xem [9]). Trong những năm gần đây, có nhiều phương pháp được các nhà toán học đưa ra để nghiên cứu sự tồn tại nghiệm yếu đối với các bài toán biên elliptic phi tuyến, đó là phương pháp bậc tô pô, phương pháp nghiệm trên - nghiệm dưới, phương pháp điểm bất động, phương pháp biến phân,... Mỗi phương pháp có những ưu điểm và hạn chế riêng do đó chỉ áp dụng được cho một lớp bài toán cụ thể. Trong số các phương pháp để nghiên cứu bài toán biên elliptic phi tuyến, chúng tôi đặc biệt quan tâm đến phương pháp biến phân. Về nguyên tắc, theo phương pháp này, để tìm nghiệm yếu của một bài toán biên elliptic, ta quy về tìm điểm tới hạn của một phiếm hàm nào đó trong một không gian hàm thích hợp. Phiếm hàm này sẽ thỏa mãn một số điều kiện để có thể khả vi và áp dụng được các kết quả biến phân nhằm thu được nghiệm của bài toán.

Demo Version - Select.Pdf SDK

Ngoài việc sử dụng nguyên lý cực tiểu, một trong những công cụ quan trọng của phương pháp biến phân là định lý qua núi (xem [4]). Nếu như nguyên lý cực tiểu chỉ áp dụng cho các bài toán có phiếm hàm năng lượng liên kết với nó bị chặn dưới thì định lý qua núi có thể áp dụng cho các bài toán mà phiếm hàm năng lượng không bị chặn dưới. Tuy nhiên, một trong những đòi hỏi của bài toán khi dùng định lý qua núi là biểu thức phi tuyến f phải thỏa mãn điều kiện kiểu Ambrosetti-Rabinowitz. Từ điều kiện này suy ra tính chất $(p - 1)$ -trên tuyến tính của hàm f , tức là

$$\lim_{|t| \rightarrow +\infty} \frac{f(x, t)}{|t|^{p-2}t} = +\infty.$$

Trong trường hợp

$$\lim_{|t| \rightarrow +\infty} \frac{f(x, t)}{|t|^{p-2}t} = \lambda \in (0, +\infty),$$

người ta thường gọi là bài toán $(p - 1)$ -tiệm cận tuyến tính. Đặc biệt, nếu λ là một giá trị riêng của toán tử elliptic xuất hiện trong phương trình người

ta gọi là bài toán cộng hưởng. Những bài toán như vậy có thể hiểu như là nhiễu của bài toán giá trị riêng. Với những điều kiện đặc biệt được áp đặt lên về phải, Landesman và Lazer [10] đã nghiên cứu lớp các bài toán này trong không gian Sobolev. Từ đó, bài toán đã thu hút một số lượng lớn các nhà toán học trên thế giới quan tâm nghiên cứu.

Nội dung chính của luận văn dựa trên việc tham khảo các kết quả nghiên cứu đã được công bố trong hai bài báo [3, 6] và các tài liệu liên quan. Thông qua việc tìm hiểu những kết quả đạt được, nắm bắt những kỹ thuật biến phân liên quan đến điều kiện Landesman-Lazer, đề tài có thể phát triển xa hơn đối với bài toán biên elliptic trong miền không bị chặn. Ngoài lời mở đầu, kết luận và tài liệu tham khảo, luận văn được chia làm hai chương:

Chương 1. Kiến thức bổ trợ. Chương này dành để trình bày những kiến thức cơ bản liên quan được dùng trong luận văn như lý thuyết độ đo, không gian Sobolev $W_0^{1,p}(\Omega)$, khái niệm khả vi Fréchet, nguyên lý cực tiểu, định lý điểm yên ngựa và một số kết quả biến phân khác.

Chương 2. Bài toán biên Dirichlet cho phương trình elliptic phi tuyến với điều kiện Landesman-Lazer. Trong chương này, chúng tôi giới thiệu bài toán biên Dirichlet đối với phương trình elliptic phi tuyến dạng sau đây

$$\begin{cases} -\Delta_p u = -\operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u) = \lambda_1 |u|^{p-2} u + f(x, u) - h(x), & x \in \Omega, \\ u = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases} \quad (1)$$

trong đó Ω là một miền bị chặn có biên $\partial\Omega$ trơn trong không gian \mathbb{R}^d , $d \geq 1$, $p \in (1, +\infty)$, $f : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ là một hàm Carathéodory và $h \in L^{p'}(\Omega)$, $p' = \frac{p}{p-1}$, λ_1 là giá trị riêng thứ nhất của toán tử $-\Delta_p(\cdot) = -\operatorname{div}(|\nabla(\cdot)|^{p-2} \nabla(\cdot))$ cho bởi công thức

$$\lambda_1 = \inf_{u \in W_0^{1,p}(\Omega) \setminus \{0\}} \frac{\int_{\Omega} |\nabla u|^p dx}{\int_{\Omega} |u|^p dx} > 0$$

với hàm riêng $\varphi_1 > 0$ có chuẩn trong không gian $W_0^{1,p}(\Omega)$ bằng 1. Bài toán (1) lần đầu được nghiên cứu bởi Landesman và Lazer [10] bằng phương pháp bậc tô pô trong trường hợp $p = 2$ và f là một hàm Carathéodory bị chặn,

với hầu khắp nơi $x \in \Omega$, tồn tại các giới hạn

$$\lim_{s \rightarrow -\infty} f(x, s) = f_{-\infty}(x), \quad \lim_{s \rightarrow +\infty} f(x, s) = f^{+\infty}(x)$$

và thỏa mãn điều kiện

$$\int_{\Omega} f_{-\infty}(x) \varphi_1(x) dx < \int_{\Omega} h(x) \varphi_1(x) dx < \int_{\Omega} f^{+\infty}(x) \varphi_1(x) dx. \quad (2)$$

Trong [3], bài toán (1) đã được nghiên cứu cho trường hợp $p \in (1, +\infty)$ và f là một hàm Carathéodory bị chặn. Cùng với điều kiện (2), Arcoya và Orsina đã đề cập đến điều kiện

$$\int_{\Omega} f^{+\infty}(x) \varphi_1(x) dx < \int_{\Omega} h(x) \varphi_1(x) dx < \int_{\Omega} f_{-\infty}(x) \varphi_1(x) dx. \quad (3)$$

Các điều kiện (2) và (3) được gọi là điều kiện kiểu Landesman-Lazer. Kết quả nghiên cứu của Arcoya và Orsina được mở rộng bởi Bouchala và Drábek [6] cho trường hợp f là một hàm Carathéodory không bị chặn. Mục đích của Chương 2 là trình bày chi tiết một số kết quả trong hai bài báo [3] và [6]. Chúng tôi sẽ nghiên cứu sự tồn tại nghiệm yếu đối với bài toán (1) bằng cách sử dụng nguyên lý cực tiểu và định lý điểm yên ngựa được trình bày trong Chương 1. Luận văn là tài liệu tham khảo bổ ích cho những ai nghiên cứu về phương pháp biến phân và phương trình elliptic không tuyến tính.