ĐẠI HỌC HUẾ
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

$* * * * * * * \diamond \diamond \diamond * * * * * * *$

ĐOÀN VIẾT LONG

CÁC WAVELET HAAR VÀ MỘT SỐ ỨNG DỤNG

Chuyên ngành: GIẢI TÍCH

Mã số: 60460102

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

THEO ĐỊNH HƯỚNG NGHIÊN CỨU

Cán bộ hướng dẫn khoa học:

TS. LÊ THỊ NHƯ BÍCH

Thừa Thiên Huế, năm 2017

Lời cam đoan

Tôi xin cam đoan đây là công trình nghiên cứu của riêng tôi và được sự hướng dẫn khoa học của TS. Lê Thị Như Bích. Các nội dung nghiên cứu, kết quả trong đề tài này là trung thực và chưa công bố dưới bất kỳ hình thức nào trước đây. Những số liệu trong các bảng biểu phục vụ cho việc phân tích, nhận xét, đánh giá được chính tác giả thu thập từ các nguồn khác nhau có ghi rõ trong phần tài liệu tham khảo. Ngoài ra, trong luận văn còn sử dụng một số nhận xét, đánh giá cũng như số liệu của các tác giả khác, cơ quan tổ chức khác đều có trích dẫn và chú thích nguồn gốc. Nếu phát hiện có bất kỳ sự gian lận nào tôi xin hoàn toàn chịu trách nhiệm về nội dung luận văn của mình.

Tác giả

Đoàn Viết Long

Lời cảm ơn

Bản luận văn được hoàn thành tại trường Đại học sư phạm Huế dưới sự hướng dẫn tận tình của TS. Lê Thị Như Bích. Nhân dịp này tôi xin bày tỏ lòng biết ơn Cô về sự hướng dẫn hiệu quả cùng những kinh nghiệm trong quá trình học tập, nghiên cứu và hoàn thành luận văn.

Xin chân thành cảm ơn Khoa Sau Đại Học, Ban chủ nhiệm Khoa Toán, các thầy cô giáo trường Đại học Sư Phạm Huế, đã giảng dạy và tạo điều kiện thuận lợi cho tôi trong quá trình học tập và nghiên cứu khoa học. Xin chân thành cảm ơn tập thể bạn bè, đồng nghiệp lớp Cao Học Toán Giải Tích K24 đã giúp đỡ tôi trong suốt thời gian học tập và nghiên cứu.

Bản luận văn chắc chắn sẽ không tránh khỏi những khiếm khuyết, vì vậy rất mong được sự góp ý kiến của các thầy cô giáo và các bạn học viên để luận văn này được hoàn chỉnh hơn.

Cuối cùng xin cảm ơn gia đình và bạn bè đã động viên, khích lệ tôi trong thời gian học tập, nghiên cứu và hoàn thành luận văn.

Xin chân thành cảm ơn!

MỤC LỤC

Danh sách hình vẽ

Lời nói đầu

Trong nhiều bài toán vật lý, kỹ thuật việc giải quyết chúng thường dẫn đến việc giải các phương trình vi phân, đạo hàm riêng hay phương trình tích phân mà việc chứng minh sự tồn tại nghiệm và biểu diễn tường minh nghiệm của các phương trình này theo công cụ giải tích thuần túy chỉ có thể áp dụng trong một số ít bài toán. Thực tế đặt ra nhiều bài toán mà việc biểu diễn tường minh nghiệm của phương trình là không thể hoặc rất phức tạp, đôi khi là không cần thiết. Khi đó ta có thể tìm nghiệm gần đúng của phương trình trong các điều kiện sai số cho phép dựa trên các phương pháp số. Ví dụ xét phương trình vi phân sau:

$$y'(x) = f(x, y), \quad x \in [a, b],$$
$$y(x_0) = y_0, \quad x_0 = a.$$

Để tìm nghiệm gần đúng của phương trình này, đầu tiên ta chia đoạn [a,b] thành các đoạn con bởi các điểm chia như sau:

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b,$$
$$x_i = x_0 + ih, \quad h = \frac{b-a}{n}.$$

Giả sử ta tìm được giá trị y_i tại điểm x_i, $1 \le i < n$. Khi đó giá trị y_{i+1} tại x_{i+1} sẽ được tìm thông qua các giá trị đã biết bởi các công thức xấp xỉ.

Một số phương pháp số tìm nghiệm phương trình vi phân thường gặp như
- Phương pháp Euler: Giá trị y_{i+1} được tìm bởi công thức sau:

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i),$$

với giá trị ban đầu $y_0 = y(x_0)$.
- Phương pháp Runge-Kutta: Phương pháp này có nhiều cấp độ khác nhau, tuy nhiên phương pháp được biết đến và sử dụng rộng rãi là phương pháp Runge-Kutta bậc 4 (RK4).

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4),$$
$$x_{i+1} = x_i + h,$$

với $k_1 = f(x_i, y_i)$, $k_2 = f(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}k_1)$, $k_3 = f(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}k_2)$, $k_4 = f(x_i + h, y_i + hk_3)$.

Hai phương pháp trên tính toán khá đơn giản, tuy nhiên khi muốn tăng độ chính xác của kết quả lên ta phải giảm bước h, dẫn đến số lần lặp tăng.

Một hướng tiếp cận khác của phương pháp tìm nghiệm gần đúng là xấp xỉ không gian vô hạn chiều của nghiệm bằng một không gian con hữu hạn chiều. Ví dụ nếu ta biểu diễn nghiệm $u(x)$ dưới dạng

$$u(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n cosnx + b_n sinnx).$$

thì nghiệm chính xác $u(x)$ có thể xem như là một hàm của vô hạn các hệ số $a_0, a_1, a_2, ..., a_n, ...$ Trong khi nghiệm xấp xỉ của nó là một hàm của một dãy hữu hạn các hệ số $a_0, a_1, a_2, ..., a_N$ nào đó.

Một số phương pháp tìm nghiệm gần đúng theo hướng tiếp cận này là phương pháp đặc trưng, phương pháp sai phân, phương pháp phần tử hữu hạn và phương pháp thể tích hữu hạn.

Mỗi phương pháp đều có ưu, nhược điểm riêng, phần lớn chúng chưa giải

quyết được các phương trình vi phân bậc cao, các loại phương trình cứng, phương trình kỳ dị hay lớp các bài toán biên... Nhằm giải quyết được các vấn đề trên, một số phương pháp khác đã được đề xuất, trong đó phương pháp wavelet dựa trên các hàm Haar có nhiều ưu điểm vượt trội trong việc xấp xỉ phương trình vi phân, cũng như phương trình tích phân và phương trình đạo hàm riêng.

Lý thuyết wavelet được đặt nền móng từ năm 1807, khi Fourier phát triển phương pháp thay thế một tín hiệu bằng chuỗi hệ số dựa trên các hàm giải tích, sau đó được A. Haar, J. Morlet, A. Grossmann, sau đó là S. Mallat và Y. Meyer phát triển lên. Năm 1910, Alfred Haar đã đề xuất dãy Haar và được công nhận là cơ sở wavelet đầu tiên được biết đến và sử dụng rộng rãi. Ông đã dùng các dãy hàm này để đưa ra một ví dụ về một hệ trực chuẩn cho không gian bình phương khả tích L^2 trên khoảng đơn [0,1]. Các hàm wavelet Haar này là cơ sở của phương pháp wavelet Haar trong việc giải các phương trình vi phân, tích phân và các phương trình đạo hàm riêng mà ta sẽ tìm hiểu trong luận văn này.

Nội dung của luận văn được chia ra làm 4 chương.

Chương 1 dành để trình bày các kiến thức cơ sở để xây dựng các wavelet Haar và các đặc trưng của nó như phép lấy tích phân của các hàm Haar, ma trận Haar, khai triển hàm số bằng chuỗi wavelet Haar, thuật toán tìm ma trận Haar. Chương 2, 3, 4 lần lượt trình bày nội dung chính của luận văn, đó là ứng dụng các wavelet Haar trong việc tìm nghiệm xấp xỉ của các phương trình vi phân, tích phân và một số phương trình đạo hàm riêng, kèm theo một số ví dụ cụ thể để minh họa.