ĐẠI HỌC HUẾ
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

$* * * * * * \diamond \diamond \diamond * * * * * *$

VÕ QUANG ANH

TÍNH ỔN ĐỊNH NGHIỆM CỦA PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN NGẪU NHIÊN

Chuyên ngành: Toán giải tích
Mã số: 60 46 01 02

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC
THEO ĐỊNH HƯỚNG NGHIÊN CỨU

Thừa Thiên Huế, năm 2017

ĐẠI HỌC HUẾ
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

* * * * * * * ⋄ ⋄ ⋄ * * * * * * *

VÕ QUANG ANH

TÍNH ỔN ĐỊNH NGHIỆM CỦA PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN NGẪU NHIÊN

Chuyên ngành: Toán giải tích

Mã số: 60 46 01 02

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC
THEO ĐỊNH HƯỚNG NGHIÊN CỨU

Cán bộ hướng dẫn khoa học:
PGS. TS. LÊ VIẾT NGƯ

Thừa Thiên Huế, năm 2017

LỜI CAM ĐOAN

Tôi xin cam đoan đây là công trình nghiên cứu khoa học của riêng tôi, các số liệu và kết quả nghiên cứu ghi trong luận văn là trung thực, được các đồng tác giả cho phép sử dụng và chưa được công bố trong bất kỳ một công trình nào khác.

Võ Quang Anh

LỜI CẢM ƠN

Tôi xin chân thành cảm ơn sự hướng dẫn tận tình, hết lòng của Thầy PGS.TS. Lê Viết Ngư. Trong quá trình nghiên cứu và thực hiện đề tài, tôi đã gặp rất nhiều khó khăn, nhờ sự động viên, giúp đỡ, chỉ bảo của thầy mà tôi mới hoàn thành được luận văn này. Xin gửi đến Thầy sự trân trọng và lòng biết ơn sâu sắc.

Tôi xin chân thành cảm ơn quý Thầy Cô ở khoa Toán Trường Đại học Sư phạm Huế, quý Thầy Cô đã tham gia giảng dạy, những người đã giúp đỡ và chỉ bảo để tôi có điều kiện tốt hoàn thành luận văn này.

Cuối cùng, tôi xin gửi lời cảm ơn đến tập thể lớp cao học Giải tích K24, những người thân, bạn bè đã động viên, giúp đỡ tôi trong suốt quá trình học tập.

Võ Quang Anh

MỤC LỤC

Kí hiệu

$\mathbb{R}$	:	Tập số thực.
$\mathbb{R}_+$	:	Tập hợp những số thực dương.
$\mathbb{R}^k$	:	Không gian Euclide k-chiều.
$\lvert\bullet\rvert$	:	Chuẩn vectơ hoặc định thức ma trận.
B_X	:	σ-đại số Borel của không gian mêtric X.
$N_t^{t_0}$	:	σ-đại số tự nhiên sinh bởi quá trình $X(t)$, $N_t^{t_0} = \sigma\{X(s) : t_0 \leqslant t \leqslant t\}$.
$C_b(X)$	:	Không gian các hàm số liên tục bị chặn trên X.
$C_b^1(X)$	:	Không gian con của $C_b(X)$ tạo thành từ các hàm liên tục có đạo hàm riêng cấp 1
$C_1(X)$	:	Không gian các hàm có đạo hàm riêng cấp 1 liên tục.
${C_1}^0(U \times \mathbb{R}_+)$	:	Lớp các hàm $V(x,t)$ có đạo hàm riêng cấp 1 liên tục trên $U \times \mathbb{R}_+$ trừ điểm $x = 0$.

$U_r = \{x : |x| < r\}$, $\overline{U}_r = \{x : |x| \leqslant r\}$.

LỜI NÓI ĐẦU

Phương trình vi phân đóng vai trò quan trọng trong kĩ thuật, vật lí, và một số ngành khoa học khác. Sự ra đời của nó xuất phát từ nhu cầu xác định mối quan hệ giữa một bên là đại lượng biến thiên liên tục và một bên là độ biến thiên của đại lượng đó.

Giải tích ngẫu nhiên bắt đầu hình thành từ đầu thế kỉ XX. Đầu tiên phải kể đến nhà toán học Norbert Wiener (1894 – 1964), Louis Bachelier (1870 – 1946). Sự ra đời của giải tích ngẫu nhiên là tất yếu khi mà giải tích cổ điển không giải thích được.

Giải tích ngẫu nhiên bao gồm ba bộ phận chính:

(1) Lý thuyết các quá trình ngẫu nhiên.

(2) Lý thuyết các tích phân ngẫu nhiên.

(3) Phương trình vi phân ngẫu nhiên.

Phương trình vi phân ngẫu nhiên đóng vai trò quan trọng trong giải tích ngẫu nhiên và được ứng dụng nhiều trong vật lí và nhiều ngành khoa học khác.

Trong không gian xác suất $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ với W_t là quá trình Wiener $m-$chiều, $(\mathcal{F}_t)_{t\in[t_0,T]}$ là một bộ lọc.

Phương trình vi phân ngẫu nhiên là phương trình có dạng:

$$dx\,(t) = f\,(x\,(t)\,, t)\,dt + g\,(x\,(t)\,, t)\,d\mathrm{W}\,(t)$$

hoặc có dạng

$$x\,(t) = x_0 + \int_0^t f\,(x\,(s)\,, s)\,ds + \int_0^t g\,(x\,(s)\,, s)\,d\mathrm{W}\,(s)$$

trong đó x_0 là biến ngẫu nhiên độc lập với $\mathrm{W}\,(t)$. Nghiệm của phương trình trên là quá trình $x\,(.) = (x\,(t))_{t\in[t_0,T]}$ với quỹ đạo liên tục thỏa các điều kiện sau:

(1) $x(.)$ là thích nghi với bộ lọc $(\mathcal{F}_t)_{t\in[t_0,T]}$.

(2) $f(x(t),t) \in \mathcal{L}^1\left([0,T],\mathbb{R}^d\right)$ và $g(x(t),t) \in \mathcal{L}^2\left([0,T],\mathbb{R}^{d\times m}\right)$.

(3) Với xác suất 1 (hầu hết w $\in \Omega$) thì (1) đúng với mọi $t \in [t_0, T]$.

Trong vài thập kỉ qua, nghiệm của phương trình vi phân ngẫu nhiên được nghiên cứu theo hai hướng chủ đạo là theo hướng định tính và theo hướng định lượng.

Ổn định là một trong những lý thuyết quan trọng của lý thuyết định tính phương trình vi phân ngẫu nhiên và có nhiều ứng dụng để giải quyết nhiều bài toán thuộc các lĩnh vực vật lý, kỹ thuật, cơ học... Năm 1892, tại trường đại học tổng hợp Kharkov, A.M.Lyapunov công bố và bảo vệ thành công luận án Tiến Sĩ nổi tiếng "Đại cương về ổn định của chuyển động" có nhan đề:" Bài toán tổng quát về tính ổn định của chuyển động". Nó đặt ra nền tảng và tạo ra bước ngoặt cho lý thuyết ổn định. Ông đã giải quyết bài toán ổn định bằng hai phương pháp, đó là phương pháp số mũ Lyapunov và phương pháp sử dụng hàm Lyapunov.

Từ năm 2010 trở lại đây, có một số nhà toán học nghiên cứu tính ổn định nghiệm của phương trình vi phân ngẫu nhiên điển hình như: Khasminskii (2012), Ditlevsen (2013) ...dựa theo phương pháp mũ Lyapunov.

Nội dung của đề tài là tìm hiểu không gian xác suất; phương trình vi phân ngẫu nhiên qua các quá trình Wiener, Poisson và Itô-Lévy. Từ đó đưa ra sự ổn định nghiệm của phương trình vi phân ngẫu nhiên và các mối liên hệ giữa chúng.

Luận văn gồm 3 chương:

+ Chương 1: Tổng quan các kết quả chính và có liên quan về không gian xác suất, các quá trình Wiener, Poisson và phương trình vi phân ngẫu nhiên.

+ Chương 2: Trình bày một số khái niệm về ổn định nghiệm và điều kiện đủ để nghiệm của phương trình vi phân là ổn định ngẫu nhiên theo quá trình Poisson.

+ Chương 3: Đưa ra sự ổn định mũ theo quá trình Itô-Lévy và mối quan hệ giữa ổn định mũ và ổn định mũ hầu chắc chắn.

Do thời gian học tập, nghiên cứu có hạn và năng lực còn nhiều hạn chế, mặc dù bản thân đã có nhiều cố gắng nhưng khó tránh khỏi những thiếu sót. Vì vậy, chúng tôi rất mong được các thầy cô và bạn đọc góp ý để luận văn được tốt hơn.