

ĐẠI HỌC HUẾ  
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

NGUYỄN ĐẮC NHÂN

# ĐỊNH LÝ LIOUVILLE CHO HÀM $f$ -ĐIỀU HÒA

**Demo Version - Select.Pdf SDK**

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC  
THEO ĐỊNH HƯỚNG NGHIÊN CỨU

Thừa Thiên Huế, năm 2017

ĐẠI HỌC HUẾ  
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

NGUYỄN ĐẮC NHÂN

# ĐỊNH LÝ LIOUVILLE CHO HÀM $f$ -ĐIỀU HÒA

*Chuyên ngành: HÌNH HỌC VÀ TÔPÔ*  
*Mã số: 60460105*

**Demo Version - Select.Pdf SDK**

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC  
THEO ĐỊNH HƯỚNG NGHIÊN CỨU

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC:  
PGS.TS. ĐOÀN THẾ HIẾU

Thừa Thiên Huế, năm 2017

# LỜI CAM ĐOAN

Tôi xin cam đoan đây là công trình nghiên cứu của riêng tôi, các số liệu và kết quả nghiên cứu ghi trong luận văn là trung thực, được các đồng tác giả cho phép sử dụng và chưa từng được công bố trong bất kỳ một công trình nào khác.

**Nguyễn Đắc Nhân**

**Demo Version - Select.Pdf SDK**

# LỜI CẢM ƠN

Lời đầu tiên của luận văn này, tôi xin bày tỏ lòng biết ơn chân thành và sâu sắc của mình tới PGS. TS Đoàn Thế Hiếu, người đã tận tình giúp đỡ và chỉ bảo tôi trong suốt quá trình hoàn thành luận văn tốt nghiệp.

Nhân dịp này, tôi xin được bày tỏ lòng biết ơn chân thành tới các thầy cô giáo đã tham gia giảng dạy khóa cao học K24, những người đã giúp tôi trang bị những kiến thức cần thiết trong những năm học vừa qua.

Tôi cũng xin gửi lời cảm ơn chân thành đến Ban Giám Hiệu, Phòng Đào tạo sau đại học và Khoa Toán, Đại học Sư phạm Huế đã tạo điều kiện thuận lợi cho tôi trong quá trình học tập và thực hiện luận văn của mình.

Sau cùng, tôi xin được gửi lời cảm ơn đến người thân, bạn bè, đặc biệt là các anh chị trong lớp Cao học Hình học và Tô pô khóa K24 đã nhiệt tình giúp đỡ tôi trong suốt thời gian thực hiện luận văn cũng như trong quá trình học tập.

**Nguyễn Đắc Nhân**

**Demo Version - Select.Pdf SDK**

# MỤC LỤC

|  |           |
|--|-----------|
| Trang phụ bì   | i         |
| Lời cam đoan   | ii        |
| Lời cảm ơn   | iii       |
| Mục lục  | 1         |
| MỞ ĐẦU   | 3         |
| <b>Chương 1 Hàm điều hòa</b>   | <b>4</b>  |
| 1.1 Hàm điều hòa trên $\mathbb{R}^n$   | 4         |
| 1.1.1 Hàm điều hòa. Một số tính chất cơ bản  | 4         |
| 1.1.2 Định lý Liouville cho hàm điều hòa bị chặn, hàm điều hòa dương               | 12        |
| 1.1.3 Một số ứng dụng. Bất đẳng thức Harnack. Công thức Bochner. Nguyên lý cực đại | 15        |
| 1.2 Hàm điều hòa trên đa tạp Riemann   | 20        |
| 1.2.1 Đa tạp Riemann. Liên thông. Độ cong Ricci                                    | 20        |
| 1.2.2 Hàm điều hòa trên đa tạp Riemann   | 29        |
| 1.2.3 Định lý Liouville cho hàm điều hòa dương trên đa tạp Riemann                 | 34        |
| 1.2.4 Công thức Bochner  | 35        |
| <b>Chương 2 Hàm <math>f</math>-điều hòa</b>  | <b>37</b> |
| 2.1 Hàm $f$ -điều hòa trên $(\mathbb{R}^n, e^{-f})$                                | 37        |
| 2.1.1 Toán tử $f$ -Laplace. Hàm $f$ -điều hòa                                      | 37        |
| 2.1.2 Mặt $f$ -cực tiểu và mối liên quan với các hàm $f$ -điều hòa                 | 42        |
| 2.2 Hàm $f$ -điều hòa trên $(M^n, e^{-f})$   | 43        |
| 2.2.1 Toán tử $f$ -Laplace. Hàm $f$ -điều hòa                                      | 43        |
| 2.2.2 Định lý kiểu Liouville cho hàm $f$ -điều hòa bị chặn                         | 44        |

|  |           |
|--|-----------|
| 2.2.3 Định lý kiểu Liouville cho hàm $f$ -điều hòa dương . . . . . | 52        |
| <b>KẾT LUẬN</b>  | <b>56</b> |
| <b>TÀI LIỆU THAM KHẢO</b>  | <b>57</b> |

**Demo Version - Select.Pdf SDK**

# MỞ ĐẦU

Hình học vi phân là một nhánh của toán học sử dụng các công cụ và phương pháp của phép tính vi tích phân, kết hợp với đại số tuyến tính và đại số đa tuyến tính để nghiên cứu các vấn đề của hình học. Một trong số những vấn đề được chú trọng nghiên cứu của hình học vi phân là hàm điều hòa trên không gian  $\mathbb{R}^n$  cũng như trên đa tạp Riemann. Một hàm  $\varphi$  được gọi là điều hòa nếu toán tử Laplace của nó bằng 0. Đặc biệt, một hàm điều hòa bị chặn hay một hàm điều hòa dương trên  $\mathbb{R}^n$  thì nó phải là một hàm hằng, đó chính là nội dung của định lý Liouville cho hàm điều hòa bị chặn, hàm điều hòa dương.

Một mảng khác của hình học vi phân hiện đang được quan tâm nghiên cứu là không gian với mật độ, một trường hợp riêng của không gian metric - độ đo. Trên không gian với mật độ, tồn tại một hàm dương (gọi là hàm mật độ) đóng vai trò trọng số trong đánh giá thể tích  $k$ -chiều. Các hàm điều hòa trong không gian với mật độ  $e^{-f}$ , gọi tắt là hàm  $f$ -điều hòa, là hàm  $\varphi$  với  $\Delta_f \varphi = 0$ , trong đó  $\Delta_f$  là toán tử Laplace với mật độ.

Với mong muốn tìm hiểu vấn đề này, được sự hướng dẫn của PGS. TS Đoàn Thế Hiếu, tôi đã chọn đề tài "**Định lý Liouville cho hàm  $f$ -điều hòa**" làm đề tài nghiên cứu của luận văn thạc sĩ. Ngoài phần mở đầu và kết luận, nội dung luận văn được trình bày theo hai chương:

- **Chương 1: Hàm điều hòa.** Chương này trình bày theo hai phần: Phần thứ nhất trình bày về hàm điều hòa trên  $\mathbb{R}^n$ , định lý Liouville cho hàm điều hòa bị chặn, định lý Liouville cho hàm điều hòa dương và một số áp dụng. Phần thứ hai giới thiệu về hàm điều hòa trên đa tạp Riemann và kết quả của định lý Liouville cho hàm điều hòa dương trên đa tạp Riemann.
- **Chương 2: Hàm  $f$ -điều hòa.** Chương này cũng được chia làm hai phần: Phần thứ nhất trình bày về hàm  $f$ -điều hòa trên  $(\mathbb{R}^n, e^{-f})$ . Phần thứ hai trình bày chi tiết chứng minh định lý kiểu Liouville cho hàm  $f$ -điều hòa bị chặn và định lý kiểu Liouville cho hàm  $f$ -điều hòa dương trên  $(M^n, e^{-f})$ .

Tuy đã cố gắng nhiều, nhưng do hạn chế về mặt thời gian và năng lực bản thân, luận văn này không tránh khỏi những sai sót. Tôi rất mong nhận được những ý kiến đóng góp của quý Thầy Cô và các bạn để luận văn được hoàn thiện hơn.